



**NOVA**

**IMS**

Information  
Management  
School

# MEGI

---

**Mestrado em Estatística e Gestão de Informação**

Master Program in Statistics and Information Management

## **Modelação e Gestão do Risco de Longevidade através de Longevity Bonds**

Leila Filipa Galaio Ribeiro

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre em Estatística e Gestão de  
Informação, Especialização em Análise e Gestão de Risco

NOVA Information Management School  
Instituto Superior de Estatística e Gestão de Informação

Universidade Nova de Lisboa

**NOVA Information Management School**  
**Instituto Superior de Estatística e Gestão de Informação**  
Universidade Nova de Lisboa

# **MODELAÇÃO E GESTÃO DO RISCO DE LONGEVIDADE ATRAVÉS DE LONGEVITY BONDS**

por

Leila Filipa Galaio Ribeiro

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em  
Estatística e Gestão de Informação, Especialização em Análise e Gestão de Risco

**Orientador:** Prof. Dr. Jorge Miguel Ventura Bravo

Novembro 2018

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Jorge Bravo, o empenho, disponibilidade e dedicação na forma como me apoiou e aconselhou ao longo das várias fases da realização desta dissertação. A sua visão crítica e exigência foram preponderantes para me auxiliar a realizar a mesma.

Aos meus pais e à minha irmã, por sempre acreditarem em mim e se terem constituído como um pilar fundamental, para me suportar ao longo de toda esta etapa. Sem dúvida que sem o seu incentivo e apoio incondicional, esta tarefa seria mais complicada.

Por fim expresso a minha gratidão aos meus amigos, pela sua constante e fundamental motivação, que em muito contribuíram para chegar até aqui.

## RESUMO

Os aumentos da longevidade humana registados a nível global nas últimas décadas, constituem uma das maiores preocupações do sistema público de pensões, companhias de seguros e patrocinadores de fundos de pensões. Para fazer face a esta problemática, têm vindo a ser desenvolvidos diferentes produtos de cobertura do risco de longevidade assentes em soluções de mercado de capitais em alternativa às tradicionais soluções de seguro e resseguro. Esta dissertação teve como objetivo a estimação dos preços de dois tipos de obrigações de longevidade, *straight bonds* e *deferred longevity bonds* com uma estrutura contratual idêntica à proposta em 2004 pelo *EIB*. Esta simulação empírica, baseia-se nos dados de mortalidade para a população dos EUA no intervalo de tempo entre 1980 a 2016 e na utilização do modelo de Poisson-Lee-Carter Poisson para modelar a dinâmica estocástica das taxas de mortalidade. Para estimar o prémio de risco de longevidade recorre-se a duas abordagens distintas: Wang Transform e Sharpe Ratio. Este estudo permitiu realizar esta análise por género, diferentes idades e maturidades, e níveis de risco. Desta forma, pretende-se dar um contributo para a resolução do problema associado ao pricing dos derivados de longevidade e provar que estes devem ser considerados pelas companhias de seguros e fundos de pensões na sua gestão do risco de longevidade.

## PALAVRAS-CHAVE

Longevidade; Obrigação de longevidade; Lee-Carter Poisson; EUA

## **ABSTRACT**

The increases in human longevity recorded globally in recent decades are a major concern of the public pension system, insurance companies and pension fund sponsors. To address this problem, different longevity risk hedging products based on capital market solutions have been developed as an alternative to traditional insurance and reinsurance solutions. This dissertation aimed to estimate the prices of two types of longevity bonds, straight bonds and deferred longevity bonds, with a contractual structure identical to the one proposed in 2004 by the EIB. This empirical simulation is based on mortality data for the US population in the time span between 1980 and 2016 and on the use of the Poisson-Lee-Carter Poisson model to model the stochastic dynamics of the mortality rates. To estimate the longevity risk premium, we used two distinct approaches: Wang Transform and Sharpe Ratio. This study allowed to perform this analysis by gender, different ages and maturities, and risk levels. Thus, it is intended to contribute to the solution of the problem associated with the pricing of longevity derivatives and to prove that they should be considered by insurance companies and pension funds in their longevity risk management.

## **KEYWORDS**

Longevity; Longevity bonds; Lee-Carter Poisson; EUA

## ÍNDICE DE CONTEÚDOS

1. Introdução.....	1
2. Revisão de Literatura .....	5
3. Metodologia.....	18
3.1. Método de projeção da Mortalidade .....	18
3.1.1. Modelo Lee-Carter .....	18
3.1.2. Modelo Poisson-Lee-Carter .....	19
3.2. Prémio de risco .....	22
3.2.1. Wang Transform .....	22
3.2.2. Sharpe Ratio.....	23
3.3. <i>Pricing</i> da Obrigação de Longevidade .....	23
4. Resultados.....	26
4.1. Dados .....	26
4.2. Estimação dos Parâmetros do Modelo Lee-Carter Poisson pelo função de Máxima Verossimilhança.....	27
4.3. Seleção do modelo ARIMA (p,d,q).....	29
4.4. Estimação dos parâmetros do modelo ARIMA.....	32
4.4.1. Análise dos resíduos .....	32
4.4.2. Projeção Futura da tendência temporal.....	35
4.5. Tábua de mortalidade Prospetiva .....	36
4.6. Estimação das probabilidades Ajustadas pelo Risco de longevidade .....	37
4.7. <i>Pricing</i> da Obrigação de Longevidade .....	39
4.7.1. Cupões da Obrigação de Longevidade .....	39
4.7.2. Estimativa do Preço de uma Obrigação de Longevidade Clássica .....	41
4.7.3. Estimativa do preço de uma Obrigação de Longevidade Diferida .....	42
4.8. Análise de Sensibilidade .....	42
4.8.1. Alteração da idade inicial da geração de referência .....	42
4.8.2. Impacto da Maturidade .....	43
5. Conclusão.....	45
6. Bibliografia .....	47
7. Anexos.....	53

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Estrutura de uma Obrigação de longevidade clássica.....	24
Figura 2 - Estrutura de uma obrigação de longevidade diferida 8 anos .....	25
Figura 3 - Taxa de mortalidade anual logaritmizada para a população dos EUA no período de 1980 a 2016 dos 60 aos 95 anos.....	27
Figura 4 - Estimação dos parâmetros $\alpha x, \beta x$ e $kt$ pelo Modelo de Lee-Carter Poisson para idades compreendidas entre os 60 e os 95 anos (homens a azul, mulheres a vermelho e o total da população a preto).....	28
Figura 5 – Série $\Delta kt$ e respetivos gráficos ACF e PACF para Homens.....	30
Figura 6 - Série $\Delta kt$ e respetivos gráficos ACF e PACF para Mulheres.....	30
Figura 7 - Série $\Delta kt$ e respetivos gráficos ACF e PACF para o Total da população .....	31
Figura 8 - QQ Normal Plot e histograma dos resíduos para homens.....	34
Figura 9 - QQ Normal Plot e histograma dos resíduos para mulheres.....	34
Figura 10 - QQ Normal Plot e histograma dos resíduos para o total da população .....	35
Figura 11 -Previsão Futura a 50 anos do parâmetro $kt$ por um passeio aleatório com <i>drift</i> com intervalos de confiança a 95% e a 99% .....	35
Figura 12 - Evolução de $\mu x, t$ ajustadas ao modelo de Lee Carter Poisson.....	37
Figura 13 - Evolução das probabilidades de morte segundo a abordagem de Wang Transform (2018 a 2042) .....	38
Figura 14 – Evolução das probabilidades de morte segundo a abordagem de Sharpe Ratio (2018 a 2042).....	38
Figura 15 - Evolução dos Cupões ao longo da maturidade da obrigação de longevidade segundo a Wang Transform .....	40
Figura 16 - Evolução dos Cupões ao longo da maturidade da obrigação de longevidade segundo o Sharpe Ratio.....	40

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Teste ADF para a série $kt$ e para primeiras diferenças .....	29
Tabela 2 - Seleção da ordem do modelo ARIMA.....	31
Tabela 3 - Estimativa dos parâmetros do modelo ARIMA (0,1,0) .....	32
Tabela 4 - Teste de Box-Ljung para os resíduos do modelo ARIMA (0,1,0) com lag=6,12,18 .....	33
Tabela 5 - Teste de Shapiro-Wilk para os resíduos do modelo ARIMA (0,1,0) .....	33
Tabela 6 - Preço de obrigação de longevidade com maturidade de 25 anos .....	41
Tabela 7 - Preço de obrigação de longevidade diferida 8 anos .....	42
Tabela 8 - Preço para uma obrigação de longevidade com diferentes idades iniciais ..	42
Tabela 9 - Preço para uma obrigação de longevidade diferida 8 anos com diferentes idades iniciais.....	43
Tabela 10 - Preço para uma obrigação de longevidade com diferentes maturidades ..	43
Tabela 11 - Preço para uma obrigação de longevidade diferida 8 anos com diferentes maturidades.....	44



## 1. INTRODUÇÃO

A evolução da longevidade humana nos países desenvolvidos nas últimas décadas é marcada por um aumento notável da esperança média de vida em todas as idades, resultado de uma diminuição assinalável nas taxas de mortalidade em todo o arco da vida humana, em especial nas idades mais jovens, e por uma redução na variabilidade da idade de óbito, que conduziu a uma progressiva rectangularização da função de sobrevivência. Estes ganhos na longevidade humana constituem, naturalmente, uma alteração positiva para os indivíduos e uma significativa conquista civilizacional das sociedades modernas, que coloca novos desafios em múltiplas áreas de intervenção, quer no domínio público (e.g., sistemas de pensões e de saúde), quer na esfera da actividade privada (Bravo, 2007).

Associado ao risco de a população viver cada vez mais anos, e muito para além da idade da reforma, surgiu o conceito de risco de longevidade, que representa a incerteza em relação a esses aumentos, como resultado de mudanças imprevistas na mortalidade. Em virtude do seu tamanho e prevalência, este risco é uma ameaça para todas as instituições que oferecem produtos de renda vitalícia, afetando sobretudo as empresas de seguros e os fundos de pensões ao nível do cálculo dos prémios e das contribuições, bem como na determinação das provisões matemáticas dos seguros e das responsabilidades dos fundos de pensões.

Os conceitos "risco de longevidade" e "risco de mortalidade" são muitas vezes usados de forma indistinta apesar de representarem, na prática, duas faces da mesma moeda. Com efeito, enquanto que a expressão risco de longevidade denota colectivamente o risco de desvios sistemáticos da mortalidade face aos valores esperados (projectados), em particular que um indivíduo ou uma população sobrevivam sistematicamente para além do esperado, o termo risco de mortalidade é usado, regra geral, para descrever o risco de que uma população viva, em termos agregados, menos do que o esperado, i.e., que a mortalidade seja superior ao previsto (Bravo, 2007; Bravo, Real e Silva, 2009)

A incerteza em torno da longevidade humana pode decompor-se em diferentes fontes de risco: flutuações aleatórias nas taxas de mortalidade (risco de volatilidade), desvios sistemáticos (*trend risk*), mortalidade catastrófica (*jump risk*) e risco de base (*basis risk*). Algumas destas fontes de incerteza podem ser eliminadas aumentando a dimensão das carteiras (homogéneas), apelando à lei dos grandes números (*pooling risk*), mas no caso do risco de longevidade a sua natureza sistemática faz com que não possa ser eliminado diversificando a carteira. Pelo contrário, o seu impacto financeiro cresce à medida que a dimensão da carteira aumenta, na medida em que os desvios afectam todas as pessoas seguras da mesma forma e no mesmo sentido (Bravo, 2007).

Decorrente destas enormes dificuldades, foi introduzida, por parte das entidades reguladoras, o regime de Solvência II em que o risco de longevidade assume especial relevância, uma vez que requer que o mesmo seja medido e avaliado pelas empresas de seguros. Como consequência o nível de capital requerido para o risco de longevidade tem vindo a aumentar, pelo que surge a necessidade de criar novas formas de transferência deste risco. As companhias de seguros que oferecem rendas vitalícias, enfrentam perdas emergentes nas suas atuais carteiras de anuidades e têm de garantir que possuem reservas maiores que o esperado, uma vez que se comprometeram a pagar a um beneficiário um conjunto de rendimentos enquanto este viver.

O risco de longevidade é também de extrema importância para o setor dos fundos de pensões, muito devido ao papel de *Asset Liability Management* (ALM). Esta é uma técnica de gestão de risco adotada pelas companhias de fundos de pensões, que como referido por Toukourou e Dufresne (2015), considera os activos, as responsabilidades e a regulação do supervisor no exercício de *match* entre activos e passivos, assegurando que ao longo do tempo os fundos irão manter um certo nível de solvência. Para tal existe um especial interesse na cobertura do risco de longevidade.

Com a crescente importância que tem vindo a ser atribuída a este risco, começou-se a desenvolver o chamado "*life market*", mercado em que se transacionam instrumentos financeiros indexados à longevidade, com o intuito de facilitar o desenvolvimento do mercado de rendas e proteger a viabilidade a longo prazo do

sistema de rendimento à reforma. Apesar de este se encontrar ainda incompleto têm-se vindo a desenvolver diferentes produtos de cobertura do risco de longevidade, como as *swaps* de longevidade (*longevity swaps*), as obrigações de longevidade (*longevity bonds*) e as obrigações de mortalidade (*mortality bonds*), contratos forward (*q-forwards* e *S-forwards*), contratos de futuros em que o subjacente é a longevidade e ainda as opções de longevidade (*longevity options*).

Do conjunto de instrumentos referido acima aqueles que se destacam devido à sua importância são as obrigações de longevidade, primeiro instrumento a ser emitido no mercado de capitais, em que o pagamento do cupão depende da proporção da população sobrevivente de determinada idade, tendo sido projetadas para fazer cobertura dos pagamentos de anuidades de companhias de seguros e fundos de pensões. Como referido por Bravo (2007), as obrigações de longevidade são um instrumento bastante complexo, mas com um grau de potencialidade considerado elevado, sendo justificado pela sua capacidade de transferir parte do risco de longevidade inerente a todo o sistema de pensões e pela sua exploração ser uma mais valia para a economia.

Quando comparadas com outros derivados, pode afirmar-se que têm uma estrutura menos complexa e os investidores estão mais familiarizados com o seu conceito.

Por outro lado, estes derivados apresentam algumas controvérsias, particularmente ao nível do seu *pricing*, uma vez que o preço que um investidor está disposto a pagar por uma obrigação de longevidade depende da estimativa da tendência das taxas de mortalidade futuras e ainda do nível de incerteza que se reduzirá num prémio de risco.

Perante esta problemática, o objetivo deste trabalho será analisar as obrigações de longevidade propostas para cobrir o risco de longevidade, nomeadamente na estimação do seu preço, uma vez que para além de ser o problema mais notável em torno destes instrumentos, é um dos principais obstáculos ao desenvolvimento desta nova classe de activos, conjuntamente com aspectos relacionados com a falta de

emitentes interessados, a definição e cálculo do índice de longevidade e a determinação do preço de mercado do risco de longevidade.

A estrutura desta dissertação é constituída por três partes. Na primeira secção é feita a revisão das pesquisas já realizadas em torno deste instrumento financeiro. Na segunda secção é descrita a metodologia, nomeadamente o modelo de Lee-Carter Poisson, que será posteriormente aplicado para projetar as probabilidades de morte, e os métodos de Wang Transform e Sharpe Ratio, utilizados para introduzir o risco de longevidade. Por fim, na terceira secção, é feita a simulação dos preços de duas obrigações de longevidade, uma clássica e uma diferida, para os dados de EUA, sendo analisado em separado os dados de mortalidade para mulheres, homens e para o total da população.

## 2. REVISÃO DE LITERATURA

Em contraste com o resto da história da humanidade, ao longo dos séculos XX e XXI tem vindo a assistir-se a um crescimento sem precedentes da esperança média de vida em todas as faixas etárias, especialmente nas sociedades desenvolvidas. As melhorias nas condições de vida, os avanços na medicina, a ausência de conflitos militares globais e inexistência de notáveis epidemias mundiais reduziram consideravelmente o número de mortes, levando a que as taxas de mortalidade fossem cada vez mais baixas (Denuit, Devolder & Goderniaux, 2007; Jevtić, Hankuk & Pirvu, 2017).

A conquista de anos de vida é uma irrefutável vitória para a população, mas devido à incerteza associada a esses aumentos, surgem múltiplas implicações no desenvolvimento económico, social e humano das sociedades (Thomsen & Andersen, 2007).

Neste contexto surge o conceito de risco de longevidade, risco inerente à incerteza das projeções de mortalidade e de esperança média de vida, ou seja, o risco de uma certa população viver em média mais do que o esperado (Antolin, P., 2007; Chen & Cummins 2010).

Este risco pode ser dividido em duas componentes, analogamente à divisão usada na literatura de mercados financeiros, ou seja, no risco diversificável e no risco agregado. A primeira traduz o risco de as taxas de mortalidade individuais diferirem das esperadas resultante do acaso, ou seja, mesmo que a taxa de mortalidade fosse conhecida, o número de mortes seria uma variável aleatória *à priori*. Como este risco se reflete no facto de parte da população morrer antes da esperança média de vida e a restante depois, o mesmo pode ser facilmente reduzido através da lei dos grandes números, isto é, aumentando o portfólio sobre a suposição de que as vidas individuais são variáveis aleatórias independentes. A segunda componente resulta de mudanças imprevistas, tais como avanços na medicina ou alterações de estilo de vida, que provoquem alterações nas taxas de mortalidade. Como não é diversificável leva à

incorporação de um prémio de risco para que os investidores estejam dispostos a assumi-lo (Blake & Cairns, 2010; Leppisaari, 2008).

Este incremento da longevidade está a ter um impacto cada vez mais visível nas instituições privadas e públicas das economias desenvolvidas, sendo de extrema importância para o setor dos fundos de pensões, especialmente no que diz respeito à adequada avaliação das responsabilidades associadas a planos de pensões de benefício definido. Estes são planos onde é estabelecido o benefício a receber a partir de uma determinada idade ou ocorrência. Quando um plano de pensão garante o pagamento de anuidades até à morte dos beneficiários, não interessa o que acontece nos mercados financeiros ou se as durações dos beneficiários possam vir a ser superiores às que estão implícitas na tábua de mortalidade utilizada nas avaliações atuariais, provocando assim um problema de financiamento no longo prazo (Cox et al., 2013).

As companhias de seguros também estão largamente expostas a este risco, nomeadamente as que oferecem anuidades vitalícias, definidas segundo Bravo (2007), como um contrato mediante o qual a companhia de seguros se compromete a pagar a um beneficiário um conjunto de rendimentos de forma periódica enquanto este estiver vivo, cessando as obrigações da companhia apenas após a sua morte. Em contrapartida, o beneficiária entrega à companhia um ou mais prémios conforme o acordo estabelecido, do mesmo modo que o Estado através do seu papel de patrocínio do sistema de segurança social de velhice e os fundos de pensão públicos.

Estas entidades têm que garantir que conseguem efetuar os pagamentos a que se comprometeram, o que depende do correto *pricing* dos seus produtos. No passado, os atuários baseavam-se em tabelas de mortalidade estáticas, ou seja, a mortalidade era assumida como um facto determinístico, uma vez que no passado acreditava-se que o risco de longevidade era diversificável e a sua dinâmica pouco relevante. Como tal o *pricing* dos produtos não era corretamente estimado. Atualmente as tabelas de mortalidade dinâmicas são o instrumento mais popular e utilizado para representar as previsões de mortalidade futuras. Estas dependem largamente do modelo de

mortalidade utilizado para as projeções, assim como da qualidade dos dados utilizados (Shen & Siu, 2013).

Neste contexto, há uma necessidade cada vez maior de mensuração e gestão do risco de longevidade, acentuado com a introdução do regime de Solvência II como previamente referido, pois este tem impacto direto no *pricing* dos produtos e na constituição do passivo destas instituições.

Para além das instituições, este risco impacta também os indivíduos, pois os sistemas tradicionais do tipo *pay-as-you-go* tornam-se gradualmente insustentáveis requerendo aumentos nas taxas de contribuição, redução das pensões e por consequência um aumento da idade de reforma como tentativa de transferir parte deste risco para os futuros pensionistas. Em Portugal, as dinâmicas desfavoráveis da demografia (baixa fecundidade, longevidade crescente), da economia e do mercado de trabalho projectadas para as próximas décadas em Portugal contribuirão para agravar as dificuldades de financiamento dos sistemas públicos de protecção social, agravando os seus problemas de sustentabilidade financeira e a pressão sobre o equilíbrio das finanças públicas. Não obstante às medidas extraordinárias de aumento da receita, de contenção e corte da despesa adoptadas no país nos últimos anos, estudos recentes evidenciam claramente o desequilíbrio demográfico e financeiro dos sistemas de protecção social, em particular dos sistemas de pensões, que tem sido colmatado pela afectação crescente de impostos e/ou outras fontes de financiamento externas (Bravo et al. 2012a,b; Bravo et al. 2013; Bravo et al., 2014, citado por GEP-MSESS, 2015; Bravo 2015a,b, 2016, 2017).

Adicionalmente, os planos de pensões de benefício definido (DB) patrocinados pelos empregadores têm vindo a ser fechados para novos membros e progressivamente convertidos para planos de contribuição definida (DC) onde a empresa e os empregados fazem contribuições fixas para um fundo de pensões. No entanto o benefício à reforma para estes planos é desconhecido, dependendo da estratégia de investimento do fundo. Os empregados ficam assim com uma maior responsabilidade em assegurar a sua

reforma, uma vez que vai depender das contribuições e da estratégia de investimento (Cocco & Gomes, 2012; Bravo e Holzmann, 2014; Fontes, 2015).

Neste cenário, assegurar uma vida confortável após a reforma torna-se imprescindível para a maioria da população, tendo vindo a assistir-se a um esforço adicional por parte dos indivíduos de se segurar contra este risco. Este é justificado pela incerteza em relação à sua longevidade, uma vez que as suas poupanças acumuladas podem-se esgotar antes da sua morte e, por outro lado, a reforma garantida ser cada vez mais incerta (Bravo, 2007).

As rendas vitalícias surgem assim como uma alternativa viável para os cidadãos obterem um complemento de rendimento na velhice, mas com o aumento da sua procura, as entidades que vendem produtos de renda vitalícia vêem aumentar a sua concentração de risco, uma vez que ocorre a transferência do risco dos indivíduos para estas entidades, havendo assim a necessidade destas gerirem eficazmente os riscos sem ser necessário segurar níveis de capitais excessivos nem cobrarem altos prémios pelos seus produtos (Blake et al., 2010; Ngai & Sherris, 2011).

As entidades expostas ao risco de longevidade têm várias técnicas ao seu dispor para lhe fazer face, as quais passam por redesenhar as características dos produtos tradicionais. A título de exemplo pode referir-se as *survivor credits*, anuidades que pagam um bónus aos beneficiários em função das taxas de mortalidade observadas na população abrangida. Uma outra solução passa por adotar uma estratégia de *pricing* diferenciada entre os indivíduos, de acordo com os seus fatores específicos de risco, como por exemplo o estado da saúde, estilo de vida, entre outros tal como sugerido em Blake et al. (2013) e Carlos (2011).

O resseguro é também uma opção válida, embora este mecanismo não conduza a uma redução do risco global, mas apenas a uma alteração de entidade que o suporta. Para além disso, o setor ressegurador não é suficientemente profundo para absorver a vasta quantidade de risco de longevidade a que as companhias de seguros e os fundos de pensões estão expostos. Adicionalmente, estes contratos têm previsíveis custos elevados associados (Cox et al., 2013).



Por fim, devido ao grande tamanho dos mercados de capitais e à correlação quase zero entre o risco financeiro e o demográfico, a gestão de risco através de mercados de capitais é indiscutivelmente a melhor solução disponível, nomeadamente através da emissão de derivados de longevidade no chamado *life market*. Estes instrumentos são contratos financeiros com retornos que dependem da evolução futura das taxas de mortalidade. Embora este mercado ainda esteja pouco desenvolvido, já ocorreram algumas transações destes derivados e são considerados a opção com mais potencial para a cobertura do risco de longevidade (Cox et al., 2013; Levantesi & Menzietti, 2017).

Segundo Fung, Ignatieva e Sherris (2015) a primeira geração de soluções para o risco de longevidade transacionadas nos mercados de capitais ocorreu com as obrigações de longevidade, instrumentos de dívida cujos *cash flows* dependem da realização de um determinado índice de sobrevivência num determinado momento.

Como se depreende, este instrumento foi desenhado para proteger o seu detentor (investidor) contra quaisquer melhorias não antecipadas na mortalidade até à maturidade do título. Assim, o *payoff* do investidor das obrigações de longevidade aumenta (diminui) quando a sobrevivência aumenta (diminui). Estas foram primeiramente apresentadas por Blake & Burrows (2001) com o nome de *survivor bonds*, obrigações em que o pagamento do cupão depende da proporção da população sobrevivente numa determinada idade (MacMinn & Brockett, 2017).

A primeira emissão de títulos de dívida indexados a um indicado de mortalidade/longevidade ocorreu em dezembro de 2003. O emitente Swiss Re colocou uma obrigação com *cash flows* indexados à evolução de um índice de mortalidade, com maturidade de quatro anos, um capital de 400 milhões USD e cupões variáveis indexados à LIBOR, adicionado de um *spread* de 135 *basis points*. A característica distintiva desta obrigação referia-se, no entanto, ao facto do reembolso do principal depender do valor observado para um índice de mortalidade, calculado com base na média ponderada das taxas de mortalidade registadas em cinco países (EUA, Reino Unido, França, Itália e Suíça), em ambos os sexos e num intervalo de idades. Os seus

principais investidores foram as instituições de fundos de pensões pois, para estas, estes instrumentos tinham um retorno atrativo e representavam uma boa solução de cobertura do risco, uma vez que em caso de catástrofe de mortalidade era reduzido o principal da obrigação e os *payouts* dos pensionistas que também seriam vítimas da ocorrência. Este instrumento foi emitido e totalmente subscrito tendo sido um grande sucesso, o que levou a que mais obrigações fossem emitidas mas com termos menos favoráveis para os investidores, por exemplo, através dos veículos SPV Vita II–Swiss Re 2005 (\$362 milhões), Vita III–Swiss Re 2007 (\$705 milhões), Vita IV–Swiss Re 2009/10 (\$175 milhões), Vita V–Swiss Re 2012 (\$275 milhões), Tartan–Scottish Re 2006 (\$155 milhões), e a OSIRIS–AXA 2006 (\$442 milhões) ( Blake et al., 2013).

Uma segunda tentativa de emissão ocorreu em novembro de 2004 proposta pelo Banco europeu de Investimentos (EIB) estruturada pelo Banque Nationale de Paris & Paribas (BNP Paribas), neste caso uma *longevity bond*, com maturidade de 25 anos e valor nominal de 540 milhões USD. Este produto distingue-se pelo facto dos cash flows estarem indexados a um índice de sobrevivência e não a um índice de mortalidade como no exemplo anterior. Apesar de esta emissão ser bastante inovadora, acabou por desapontar uma vez que não conseguiu gerar procura suficiente para ser lançada. Esta obrigação apresentava ainda alguns problemas, tais como ter uma cobertura imperfeita do risco de longevidade, o facto dos investidores não saberem se o seu prémio de risco constante era “justo” e a mesma necessitar de um capital inicial muito elevado em comparação com os riscos que estavam a ser cobertos. Adicionalmente, no geral, o conceito de “*longevity bond*” não era familiar para a maioria dos participantes no mercado. No entanto, esta obrigação falhou sobretudo por não ter sido claro o cálculo do índice de sobrevivência e das projeções das taxas de mortalidade. (Blake et al., 2013; Blake, Cairns & Dowd, 2006).

Todavia, a emissão das obrigações de longevidade levanta uma série de problemas, particularmente num desequilíbrio entre a procura e a oferta, sendo a oferta muito superior à procura. As empresas que fazem pagamentos que dependem do tempo de vida dos indivíduos são as entidades com especial interesse na compra de obrigações

de longevidade, nomeadamente os fundos de pensões e as empresas de seguros (Blake, Boardman & Cairns, 2010).

No que diz respeito à entidade emitente, estas podem ser emitidas por empresas públicas ou privadas, sendo os emitentes naturais as entidades com posições longas no risco de longevidade, podendo referir-se, a título de exemplo, as empresas farmacêuticas que beneficiam se os indivíduos viverem mais tempo, uma vez que irão consumir mais medicamentos. No entanto é defendido por Blake, Boardman and Cairns (2010) que estas devem ser emitidas pelo Estado devido à sua capacidade de emissão em grande escala e devido ao seu interesse em garantir que se desenvolva um mercado de rendas eficiente, uma vez que beneficia em incentivar a poupança à reforma em planos DC. Para além disso, recebe um prémio por assumir o risco de longevidade determinado pelo mercado, reduzindo ainda mais o custo esperado da dívida nacional de longo prazo. Importa ainda referir que, em última instância, o Estado é o detentor de último recurso do risco de longevidade da população e das instituições. Em contrapartida, existem argumentos contrários à emissão de obrigações de longevidade pelo Estado devido à sua já elevada exposição ao risco de longevidade através dos sistemas públicos de segurança social e de saúde. Outro motivo relevante será o investimento extra necessário para acompanhar as mudanças demográficas implícitas (Thomsen & Andersen, 2007; Blake, Boardman & Cairns, 2010).

O risco de crédito das emissões também levanta algumas dificuldades, visto que cada produto envolve um número de diferentes contrapartes e uma longa maturidade (por exemplo a *EIB longevity bond* tem uma maturidade de 25 anos). Então para garantir o sucesso do contrato implica que se estabeleça confiança suficiente de que os *cash flows* acordados vão ser pagos. Os detentores destas obrigações querem reduzir a sua exposição ao risco de longevidade, o que não significa que estejam dispostos a aumentarem a sua exposição a outros riscos de mercado ou ao adicional risco de crédito (Blake, Cairns & Dowd, 2006).

Outros problemas relevantes em relação às emissões destes derivados estão relacionados com o *pricing*, devido à adoção de uma representação estocástica da

mortalidade, à estimativa do prémio “justo” a atribuir ao risco de longevidade e ainda à escolha do índice de sobrevivência, pois existe a necessidade de minimizar o risco de base entre a população de referência para a construção do índice e a mortalidade efetivamente experienciada nos membros que adquirem os produtos (Carlos, 2011).

Atualmente existem vários tipos de obrigações de longevidade dependendo do tipo de obrigação, do índice de sobrevivência escolhido, da função de pagamento, da maturidade, dos riscos de crédito envolvidos, da posição que está a ser coberta e do tipo de instituição e de portfólio. Embora possam variar nestas dimensões, são agrupadas em duas grandes categorias, “*principal-at-risk*” e “*coupon-based*” longevity bonds. Na primeira o investidor corre o risco de perder totalmente ou parcialmente o principal se o evento de mortalidade ocorrer e, no segundo, os títulos encontram-se indexados à mortalidade (Blake et al., 2006).

Podem destacar-se as obrigações de longevidade com cupão zero nas quais, segundo Ngai e Sherris (2011), ocorre apenas um único pagamento em proporção com a atual taxa de sobrevivência na maturidade, permitindo ao detentor construir uma carteira com várias maturidades. Este produto contrasta com a obrigação de longevidade “original” (*survivor bond*), que é uma obrigação perpétua com pagamentos dependentes da evolução de um índice de sobrevivência em que apenas os cupões são contingentes à evolução da mortalidade e os pagamentos ocorrem enquanto estiver vivo o último elemento da população de referência, i.e., a maturidade da obrigação é estocástica. Outras variantes destes instrumentos são as obrigações de longevidade inversas as quais se inspiram nos *inverse floaters*, obrigações de taxa variável em que os cupões variam inversamente com os movimentos nas taxas de juro; as obrigações de catástrofe de longevidade que têm como principal objetivo cobrir o risco de brevidade (risco de morte prematura); a obrigação de longevidade colateralizada (CLO), que é uma fração de um conjunto de obrigações de longevidade, ou seja, cada tranche provoca diferentes exposições ao risco de longevidade e diferentes retornos esperados; e, por fim, as Obrigações de Longevidade Diferidas, obrigações em que os *cash flows* são

diferidos no tempo em relação à data de emissão (Blake, Cairns & Dowd, 2006; Carlos, 2011).

Considerando que a avaliação do risco de longevidade está intimamente relacionada com o desenvolvimento de melhores modelos de mortalidade e que estes constituem uma questão chave (como referido anteriormente) à emissão de obrigações de longevidade, ao longo dos últimos anos tem vindo a ser desenvolvidos vários artigos e estudos sobre a modelização das taxas de mortalidades resultando em vários modelos estocásticos discretos e contínuos, existindo assim uma literatura vasta e crescente sobre esta temática.

O ponto de partida geral nesta literatura é o trabalho de Lee e Carter (1992), onde foi criado um modelo estocástico que permite descrever a mortalidade com recurso a um só índice e projetado com métodos de previsão de séries temporais, aplicado originalmente na previsão das taxas de mortalidade nos Estados Unidos da América. Outro modelo clássico, em tempo discreto, de modelização de mortalidade estocástico é o modelo Cairns, Blake e Dowd (2006), que depende das trajetórias de dois fatores estocásticos.

Existem, subsequentemente, modelos mais avançados para modelar as forças estocásticas da mortalidade, como é o caso de Bauer (2006), onde é definido um modelo de mortalidade aplicado a um mercado de obrigações de longevidade livre de arbitragem e exógeno, ou seja, onde existem produtos com diferentes maturidades e tempos de injeção. Outro trabalho digno de referência é o de Bravo (2008) que utilizou a *framework* Affine-Jump Diffusion como método para obter soluções de forma fechada para a probabilidade de sobrevivência.

De salientar o trabalho de Denuit, Devolder e Goderniaux (2007) onde, aplicando esta abordagem inserida numa ótica de mortalidade descrita pelo modelo de Lee-Carter e de Dong, Yuen e Wu (2014), a taxa de juro é modelada através de uma cadeia de Markov e a taxa de mortalidade é descrita pela soma de um modelo regime-switching Gompertz-Makeham e um processo regime-switching shot-noise.

Dong, Yuen e Wu (2018) aplicaram recentemente na literatura esta metodologia, propondo o modelo de mortalidade *Markovian regime-switching* para estimar o preço dos produtos indexados à mortalidade, que incorporam não só as variações causadas por fatores exógenos como também as mudanças de estrutura das condições económicas e ambientais num modelo de mortalidade estocástica dinâmica.

Atualmente, como resultado de o risco de longevidade se ter tornado um fenómeno global e haver a necessidade de uma melhor compreensão da correlação entre a diminuição da mortalidade entre múltiplas populações, têm vindo a ser desenvolvidos modelos de mortalidade que projetam as taxas de mortalidade futuras para diferentes países em simultâneo, como é o caso do trabalho desenvolvido por (Yang e Wang, 2013), onde é feita uma análise de cointegração para examinar a mortalidade nos países selecionados e estimar o preço de uma *Multi-country longevity bond*. Importa ainda mencionar o trabalho de Chen, MacMinn e Sun (2017), onde é aplicado um modelo de copula denominado por *Dynamic Factor Copula Mortality Model*.

Para introduzir o risco de longevidade, as quatro abordagens mais populares são: *Wang Transform*, *risk neutral Approach*, *Heath-Jarrow-Morton (HJM)* e *Instantaneous Sharpe Ratio* (Bravo & Freitas, 2018). A *wang transform* e o *Sharpe Ratio* são consideradas abordagens de distorção, ou seja, ajustam a distribuição do índice de sobrevivência para criar valores esperados ajustados ao risco de longevidade que podem ser descontados à taxa de juro sem risco (Dong, Yuen & Wu, 2014)

A *Wang Transform* usa uma transformada que depende apenas de uma variável intitulada preço de mercado do risco de longevidade para ajustar as probabilidades de morte pelo risco de longevidade. (Denuit, Devolder & Goderniaux, 2007)

O *Instantaneous Sharpe Ratio* assume que o prémio exigido pelo investidor para assumir o risco de longevidade é igual ao *Sharpe Ratio*, tendo sido aplicada por Bayraktar, Milevsky, Promislow e Young (2008). Estes autores desenvolveram uma teoria para avaliar o risco de mortalidade não diversificável num mercado incompleto ao assumir que a empresa que emite um sinistro contingente à mortalidade exige uma

compensação, sendo essa compensação definida *pelo Sharpe Ratio* aplicado a uma renda vitalícia.

A abordagem *Risk Neutral* é baseada numa teoria económica, na qual se estabelece que mesmo num mercado incompleto, se o mercado como um todo exclui arbitragem, existirá pelo menos uma medida de probabilidade *risk-neutral*  $Q$  que pode ser usada para calcular os preços justos (Blake et al., 2006).

A *Heath-Jarrow-Morton* assume que a dinâmica da estrutura a termo da mortalidade e a dinâmica da estrutura a termo das taxas de juros são independentes. Esta abordagem foi várias vezes usada na literatura, como é o exemplo do trabalho desenvolvido por Barbarin (2007) que tentou acoplar o modelo de HJM a um modelo de previsão de mortalidade mais realista, onde é estudada a influência da mortalidade atual (real) na mortalidade futura, sendo que, nos trabalhos anteriores, havia a assunção de independência entre estas duas grandezas, existindo também uma revisão mais formal da definição de preço de uma obrigação de longevidade.

Contudo, como a obrigação de longevidade teve um sucesso limitado entre os investidores, devido à falta de liquidez e transparência, houve a necessidade de criar uma grande variedade de produtos no mercado financeiro que permitem aos investidores transferir risco, servindo de exemplo as *longevity swaps*, *q-forwards*, futuros de mortalidade, surgindo nos últimos anos as opções de longevidades (Boyer & Stentoft, 2013).

As *longevity swaps* são um acordo para trocar um ou mais *cash-flows* no futuro, baseando-se no resultado de um determinado índice de sobrevivência, numa dada idade  $x$  e para o período  $t$ . A maior parte destes derivados são transacionados no mercado OTC (*over-the-counter*) em que uma das pernas (*legs*) está indexada à publicação dos resultados de determinada projeção de longevidade e, a outra, varia de acordo com a realização de um determinado índice, sendo as *swaps* mais comuns as *S-forwards* (*Swaps* com apenas um pagamento) e as *Vanilla Longevity Swaps*, em que ocorre uma série de pagamentos ao longo do tempo. Estas são atrativas uma vez que apresentam baixos custos de transação, facilidade de cancelamento, não necessitam de um mercado

líquido, dependendo apenas da existência de vantagens comparativas para ambas as partes ou perspectivas distintas quanto ao desenvolvimento da mortalidade no futuro, sendo bastante flexíveis uma vez que podem ser ajustadas consoante as necessidades das partes. O exemplo mais evidente da aplicação deste instrumento é a sua utilização por parte das companhias de seguros, que exploram as vantagens de deterem exposições opostas ao risco de longevidade, ou seja, exposição longa no caso dos seguros de vida em caso de morte e exposição curta no caso de anuidades (Blake et al., 2006).

Os *q-forward* (*S-forward*) são instrumentos simples do mercado de capitais para a transferência de risco de longevidade e de mortalidade, tendo *payoffs* indexados a um índice de mortalidade (longevidade). É um acordo em que duas partes trocam na data de maturidade um montante proporcional à taxa de mortalidade realizada de uma determinada população numa data futura pelo montante proporcional à taxa de mortalidade fixa mutuamente acordada no início. Assim, podemos interpretar um *q-forward* como uma *swap* de cupão zero que troca a taxa de mortalidade fixa pela mortalidade flutuante de uma população específica, na data de maturidade. Apresentam como principal problema a insuficiência de compradores para os contratos, pois são usados para fazer cobertura do risco de longevidade e do risco de mortalidade, que tipicamente é aplicada a diferentes idades, o que cria uma assimetria entre as necessidades dos potenciais compradores e por sua vez afeta o preço de mercado (Barrieu & Veraart, 2014; Boyer & Stentoft, 2013; Coughlan et al., 2007).

Adicionalmente, surgiram os futuros de mortalidade que, ao contrário dos produtos apresentados anteriormente, podem ser negociados em bolsa. Estes implicam a definição do ativo subjacente, (normalmente a evolução do preço de um produto de longevidade, por exemplo, as obrigações de sobrevivência/longevidade), que podem determinar o retorno sobre o contrato de futuros (Blake et al., 2006).

Atualmente a comunidade científica tem dedicado especial atenção às opções de longevidade, que, por serem um instrumento de cobertura de risco não linear, ainda se encontram pouco desenvolvidas e comercializadas. Estes instrumentos são



especialmente atrativos para especuladores que implementam estratégias baseadas na evolução da volatilidade e não ao nível das taxas de mortalidade, ou seja, que desejem limitar as suas perdas decorrentes de movimentos adversos na mortalidade e ao mesmo tempo que beneficiem de uma eventual evolução favorável dos fatores de risco. Estas são consideradas por Fung, Ignatieva e Sherris (2015) como não sendo instrumentos eficazes na cobertura do risco de longevidade, tendo como principal problema a escolha adequada do ativo subjacente (índice de sobrevivência, *longevity bond*, etc) de modo a garantir o sucesso do mercado.

Recentemente têm vindo a ser discutidas a criação de *longevity caplets* e de *longevity floolets*, e analogamente ao que acontece no mercado de opções com taxas de juro podemos imaginar a formação de *longevity caps* e *longevity floors*, instrumentos que são constituídos por combinações dos anteriores, respetivamente, e com diferentes datas de exercícios. Por outro lado, também têm vindo a ser analisados os *mortality swaptions*, contratos mais sofisticados em que o instrumento subjacente seria um *swap* de mortalidade de um tipo e prazo específicos. Pode ser Americano, europeu ou Bermuda, e oferece ao seu titular o direito de entrar no *swap* em qualquer um dos dois lados (Alho, Bravo & Palmer, 2012; Bravo & Freitas, 2018; Blake et al., 2006).

Em suma, um dos principais obstáculos, que retarda o desenvolvimento do mercado mundial de longevidade, é a determinação do preço destes instrumentos. O facto de, atualmente, este mercado se encontrar incompleto, torna impossível estimar um preço de mercado exclusivo do risco de longevidade, ou seja, o prémio que uma companhia de seguros de vida ou plano de pensão pode estar disposto a pagar para se libertar desse risco. Contudo, embora ainda esteja longe de estar totalmente desenvolvido, já têm demonstrado progressos ao nível das suas transações (Levantesi & Menziettu, 2017; Jevtić et al.; 2017).

### 3. METODOLOGIA

O foco desta dissertação é calcular o preço de uma obrigação de longevidade através dos dados da mortalidade dos Estados Unidos da América (EUA). Para tal começou-se pela escolha de um método de projeção da mortalidade e posteriormente procedeu-se à inclusão do risco de longevidade nas probabilidades de morte projetadas.

#### 3.1. MÉTODO DE PROJEÇÃO DA MORTALIDADE

Na conjuntura atual, em que a modelização da mortalidade assume especial relevância, para obter uma melhor estimativa do *pricing* dos produtos indexados à longevidade têm vindo a ser desenvolvidas várias abordagens que conduzem à construção de tábuas de mortalidade prospetivas mais exatas.

Como, neste caso, os dados foram publicados com uma base anual, vai recorrer-se a modelos de mortalidade estocásticos discretos. Os mais populares são o modelo de Lee-Carter e o modelo de Cairns-Blake-Dowd, pelo que neste trabalho irá ser aplicada uma extensão do primeiro. A seleção deste modelo deveu-se a este ser relativamente simples e tão preciso quanto outros modelos.

##### 3.1.1. Modelo Lee-Carter

O método proposto por Ronald Lee e Lawrence Carter (1992) tornou-se um dos principais e mais populares modelos de previsão da mortalidade. Foi desenvolvido especificamente para os dados dos Estados Unidos da América, no intervalo de 1933 a 1987. Atualmente este método é aplicado a vários países e a vários períodos de tempo.

Este modelo combina duas partes, um modelo demográfico específico para cada idade e um indicador de tendência temporal. Trata-se de um método baseado nos comportamentos históricos da mortalidade para prever o futuro. Na sua formulação original é definido por uma função log-bilinear, ou seja:

$$\ln(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t} , \text{ com } \varepsilon_{x,t} \sim (0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (1)$$

$$x = 1, \dots, X \quad \wedge \quad t = 1, \dots, T$$

onde os parâmetros têm os seguintes significados:

- $\mu_{x,t}$ : força de mortalidade à idade  $x$  e durante o ano  $t$ ;
- $\alpha_x$  : nível médio de taxas de mortalidade no tempo;
- $\beta_x$ : padrão de oscilação nas taxas de mortalidade;
- $k_t$ : tendências temporais do nível de mortalidade;
- $\varepsilon_{x,t}$ : ruído branco, que reflete influências históricas específicas a cada faixa etária, não capturadas pelo modelo.

Para que este modelo só tenha uma solução, os autores definiram duas restrições:

$$\sum_{x \min}^{x \max} \beta_x = 1 \wedge \sum_{t \min}^{t \max} k_t = 0$$

### 3.1.2. Modelo Poisson-Lee-Carter

Ao longo da literatura têm vindo a ser propostas várias extensões e modificações ao modelo proposto por Lee e Carter, numa tentativa de contornar as suas limitações. Uma das maiores críticas apontadas a este modelo, é assumir a homocedasticidade dos erros, ou seja, estes serem distribuídos com variância constante, o que não é verdade para idades mais avançadas.

Com o intuito de colmatar este problema, Brouhns et al. (2002) implementou uma abordagem alternativa que mantém a forma log bilinear da força da mortalidade do modelo de Lee-Carter, mas assume que o número de mortes segue uma distribuição de Poisson.

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(\mu_{x,t} E_{x,t}), \mu_{x,t} = e^{(\alpha_t + \beta_x k_t)} \quad (2)$$

Onde  $D_{x,t}$  é o número de mortes no ano  $t$ , à idade  $x$ . Os parâmetros  $\alpha_t, \beta_x, k_t$  mantêm o mesmo significado que atribuído no modelo Lee-Carter, assim como se mantêm as suas restrições.  $\mu_{x,t}$  representa a força da mortalidade e apresenta forma de uma log-bilinear:

$$\ln(\mu_{x,t}) = \alpha_t + \beta_x k_t \quad (3)$$

### 3.1.2.1. Estimação dos parâmetros pelo método de Máxima Verossimilhança

Nesta abordagem, os parâmetros  $\alpha_x, \beta_x$  e  $k_t$  são estimados pela maximização do logaritmo da função de verossimilhança que é dada por:

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta, k) = \ln \left\{ \prod_{t=tmin}^{tmax} \prod_{x=xmin}^{xmax} \left( \frac{\lambda_{x,t}^{d_{x,t}} e^{-\lambda_{x,t}}}{(d_{x,t})} \right) \right\} \quad (4)$$

Onde  $\lambda_{x,t}$  é o número esperado de óbitos na idade  $x$  e ano  $t$ , ou seja,

$$\lambda_{x,t} = E[D_{x,t}] = E_{x,t} e^{\alpha_t + \beta_x k_t} \quad (5)$$

A presença do termo  $\beta_x k_t$ , não permite que se tenha um modelo linear. Os autores propõem a aplicação de um método iterativo desenvolvido por Goodman (1979), baseado no algoritmo de Newton-Raphson. Este método consiste em atualizar, na  $(v+1)$ -ésima iteração, um conjunto de parâmetros  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  enquanto os outros parâmetros se mantêm fixos, recorrendo ao seguinte esquema:

$$\hat{\theta}_j^{(v+1)} = \hat{\theta}_j^{(v)} - \frac{\frac{\partial \mathcal{L}^{(v)}}{\partial \theta_j}}{\frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(v)}}{\partial \theta_j^2}} \quad (6)$$

Para iniciar o algoritmo é necessário definir os valores iniciais dos parâmetros  $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, k^{(0)}) = (0, 1, 0)$  e depois atualizar os parâmetros:

- $\hat{\alpha}_x^{(v+1)} = \hat{\alpha}_x^{(v)} + \frac{\sum_t (d_{x,t} - \hat{d}_{xt}^{(v)})}{\sum_t \hat{d}_{xt}^{(v+1)}}, \quad \hat{\beta}_x^{(v+1)} = \hat{\beta}_x^{(v)}, \quad \hat{k}_t^{(v+1)} = \hat{k}_t^{(v)},$
- $\hat{k}_t^{(v+2)} = \hat{k}_t^{(v+1)} + \frac{\sum_t (d_{x,t} - \hat{d}_{xt}^{(v+1)}) \hat{\beta}_x^{(v+1)}}{\sum_x \hat{d}_{xt}^{(v+1)} (\hat{\beta}_x^{(v+1)})^2}, \quad \hat{\beta}_x^{(v+2)} = \hat{\beta}_x^{(v+1)}, \quad \hat{\alpha}_x^{(v+2)} = \hat{\alpha}_x^{(v+1)}$
- $\hat{\beta}_x^{(v+3)} = \hat{\beta}_x^{(v+2)} + \frac{\sum_t (d_{x,t} - \hat{d}_{xt}^{(v+2)})}{\sum_t \hat{d}_{xt}^{(v+2)} (\hat{k}_t^{(v+2)})^2}, \quad \hat{\alpha}_x^{(v+2)} = \hat{\beta}_x^{(v)}, \quad \hat{k}_t^{(v+3)} = \hat{k}_t^{(v+2)}$

Após terem sido estimados os parâmetros  $\alpha_t, \beta_x$  e  $k_t$  pelo modelo Lee-Carter Poisson, vai selecionar-se o Modelo ARIMA(p,d,q)<sup>1</sup> mais adequado para projetar a tendência temporal da mortalidade  $k_t$ , pois este contém toda a informação sobre a evolução da mortalidade no tempo.

Por fim, com vista a gerar a tábua de mortalidade para obter as probabilidades de mortalidade projetadas  $(q_{x,t})$ , vão ser usados os parâmetros  $\alpha_x$  e  $\beta_x$  e as previsões de  $k_t, \hat{k}_t$ , recorrendo às seguintes equações:

$$\mu_{x,t} = e^{(\alpha_t + \beta_x \hat{k}_t)} \quad (7)$$

$$q_{x,t} = 1 - e^{(-\mu_{x,t})} \quad (8)$$

---

<sup>1</sup> Modelo Auto-regressivo integrado de médias móveis recorrentemente utilizado na modelação e previsão de séries temporais. A representação ARIMA (p, d, q) refere-se às ordens de auto-regressão, de integração e de média móvel.

### 3.2. PRÉMIO DE RISCO

Com o propósito de introduzir o risco de longevidade para simular o índice de sobrevivência, vão ser abordados dois métodos, *Wang Transform* e o *Sharpe Ratio*.

Estes dois métodos vão dar origem a probabilidades de morte “ajustadas” pelo risco de longevidade.

#### 3.2.1. Wang Transform

Wang (2000) propõe uma abordagem universal, que segue a seguinte transformada:

$$F^*(x) = \Phi[\Phi^{-1}(F(x)) - \lambda] \quad (9)$$

onde:

- $\Phi$ : função de distribuição de probabilidade Normal estandardizada;
- $\lambda$ : parâmetro de ajustamento da transformada de Wang (preço de mercado do risco)
- $F^*$ : função de distribuição do variável  $x$

Para introduzir as probabilidades de morte projetadas pelo modelo Lee-Carter Poisson, vai aplicar-se a seguinte formula equivalente desenvolvida por Lin e Cox (2005):

$${}_tq_x^\lambda = \Phi[\Phi^{-1}({}_tq_x^{BE}) - \lambda] \quad (10)$$

Onde:

- ${}_tq_x^\lambda$  : probabilidades de morte ajustadas pelo risco de longevidade pela Wang Transform
- ${}_tq_x^{BE}$ : melhor estimativa das probabilidades de morte

Naturalmente, para cada  $\lambda$  obtem-se uma transformada diferente.

### 3.2.2. Sharpe Ratio

Milevsky, Promislow e Young (2005, 2006) propõem o chamado *Instantaneous Sharpe Ratio* para determinar os prêmios de risco de mortalidade. Nesta abordagem, assume-se que o prêmio exigido pelos investidores para assumir o risco de longevidade é o Sharpe Ratio.

$${}_tq_x^{SR} = {}_tq_x^{BE} (1 - SR \cdot T \cdot \sigma_x) \quad (11)$$

onde os parâmetros têm os seguintes significado:

- ${}_tq_x^{SR}$ : probabilidades de morte ajustadas pelo risco de longevidade pelo método de *Sharpe Ratio*
- SR: *Sharpe Ratio*
- T: tempo até à maturidade do contrato
- $\sigma_x$ : desvio padrão das taxas de mortalidade
- ${}_tq_x^{BE}$ : melhor estimativa das probabilidades de morte

### 3.3. PRICING DA OBRIGAÇÃO DE LONGEVIDADE

Na aplicação prática deste trabalho, irá ser criada uma obrigação de longevidade semelhante à emitida pelo EIB/BNP Paribas, ou seja, um instrumento financeiro em que os cupões são proporcionais à evolução da população sobrevivente. O preço destas obrigações (P) é obtido através do cálculo dos *cash flows* futuros indexados ao índice de sobrevivência considerando o risco de longevidade, à taxa de juro esperada (*i*):

$$P = \sum_{t=1}^T \frac{CS_x(t)}{(1+i)^t} \quad (12)$$

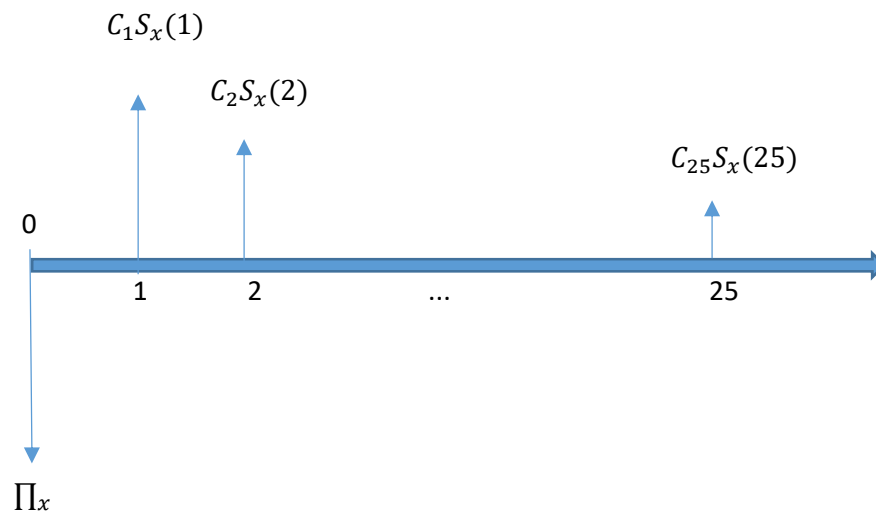
$$P = \frac{CS_x(1)}{(1+i)^1} + \frac{CS_x(2)}{(1+i)^2} + \dots + \frac{S_x(T)}{(1+i)^T}$$

Onde C representa um valor fixo e  $S_x(t)$  representa o índice de sobrevivência, dado por:

$$S_x(t) = {}_t p_x = (1 - {}_0 q_x)(1 - {}_1 q_x)(1 - {}_2 q_x) \dots (1 - {}_{t-1} q_x) \quad (13)$$

A Figura 1 representa a estrutura de uma obrigação de longevidade com 25 anos de maturidade, onde  $\Pi_x$  representa o valor actual (*Present Value*) ou o preço para adquirir este derivado.

Figura 1 - Estrutura de uma Obrigação de longevidade clássica



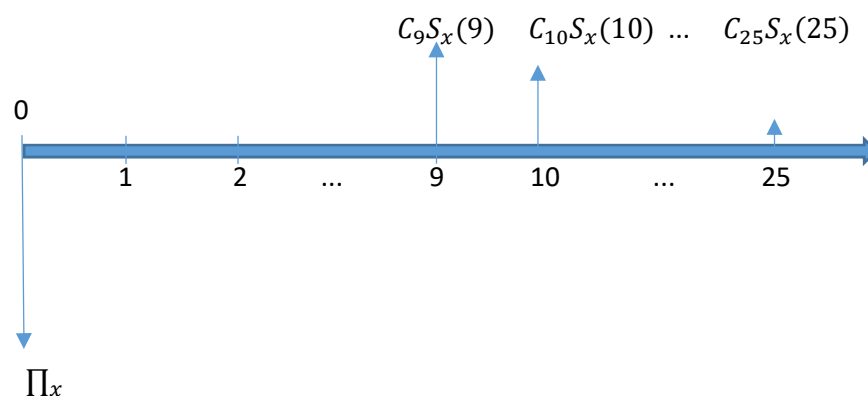
Fonte: Elaboração própria com base em Ngai e Sherris (2011).



Se a proporção de população de referência que sobrevive em cada ano for superior ao esperado, o índice de sobrevivência vai ser superior e a obrigação irá pagar cupões mais altos aos investidores. Assim, os sponsors de pensões e companhias de seguro, naturais investidores, ao receberem mais terão uma maior ajuda a pagar as pensões e anuidades a que se comprometeram, que por sua vez irão ser também superiores ao esperado. No caso de a população sobrevivente em cada ano ser inferior ao esperado, o título irá pagar cupões mais baixos e os fundos de pensões e companhias de seguros também irão efetuar menos pagamentos de pensões e anuidades.

Adicionalmente vai simular-se o preço de uma obrigação de longevidade diferida (deferred longevity bond), com a sua estrutura representada na figura 2. Esta obrigação começa a pagar cupões indexados à longevidade  $n$  anos após a sua emissão, até à maturidade do título,  $T$ . A vantagem desta obrigação é que não considera a cobertura ineficaz dos cupões nos primeiros anos e, portanto, requer muito menos capital inicial do que uma obrigação com pagamento de cupões imediatos.

Figura 2 - Estrutura de uma obrigação de longevidade diferida 8 anos



Fonte: Elaboração própria com base em Ngai e Sherris (2011).

## 4. RESULTADOS

A aplicação deste trabalho tem como objetivo a estimação e comparação do preço de dois tipos de obrigações de longevidade, a clássica e a diferida, ambas semelhantes à obrigação de longevidade emitida em 2004, em conjunto pelo BNP Paribas e o Banco Europeu de Investimento (EIB). Para tal foi utilizado o *software* R ao longo deste capítulo, efetuando-se os cálculos em separado para homens, mulheres e total da população.

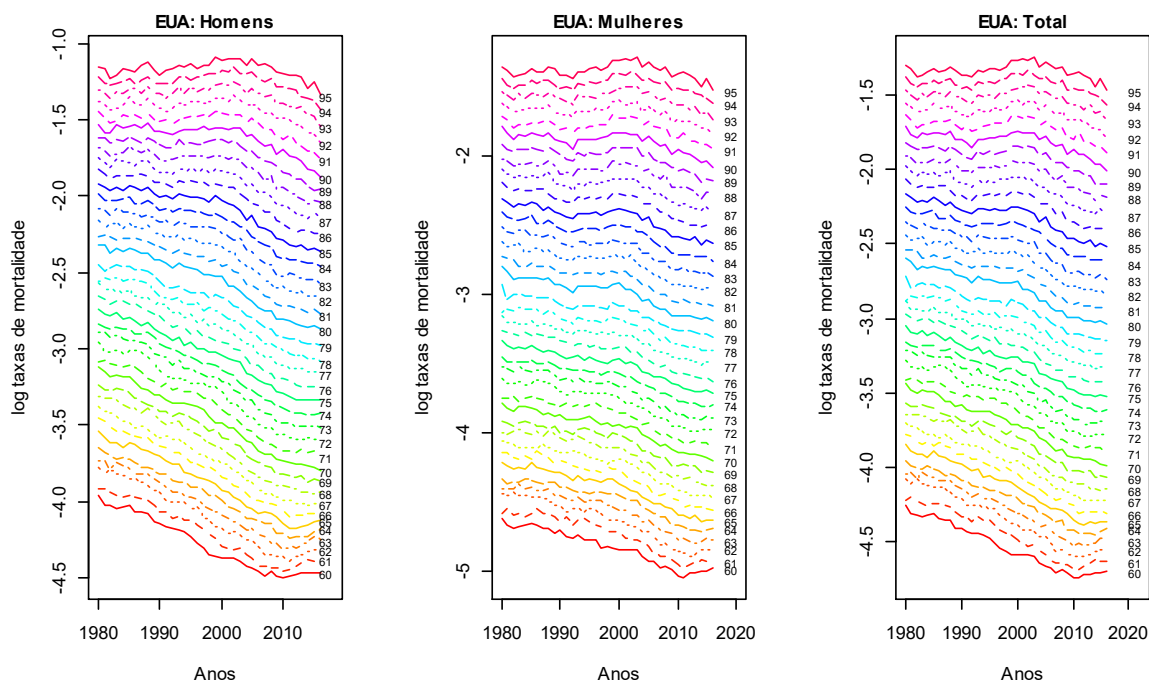
### 4.1. DADOS

Para executar a metodologia apresentada no capítulo anterior, recolheu-se os dados da população dos EUA recorrendo à *Human Mortality Database* (HMD), definindo-se o intervalo de idades dos 60 aos 95 anos e o período temporal de 1980 a 2016, que é o último ano disponível. Os dados contêm o número de mortes  $D(x, t)$  e a correspondente exposição ao risco  $E(x, t)$ , por género, idade e ano de calendário.

Os gráficos seguintes demonstram, para a população dos EUA, a evolução do logaritmo da taxa de mortalidade de acordo com o intervalo de tempo selecionado e por idade para homens, mulheres e para o total da população. Sendo a taxa de mortalidade representada pela seguinte formula:

$$m(x, t) = \frac{D(x, t)}{E(x, t)} \quad (14)$$

Figura 3 - Taxa de mortalidade anual logaritmizada para a população dos EUA no período de 1980 a 2016 dos 60 aos 95 anos



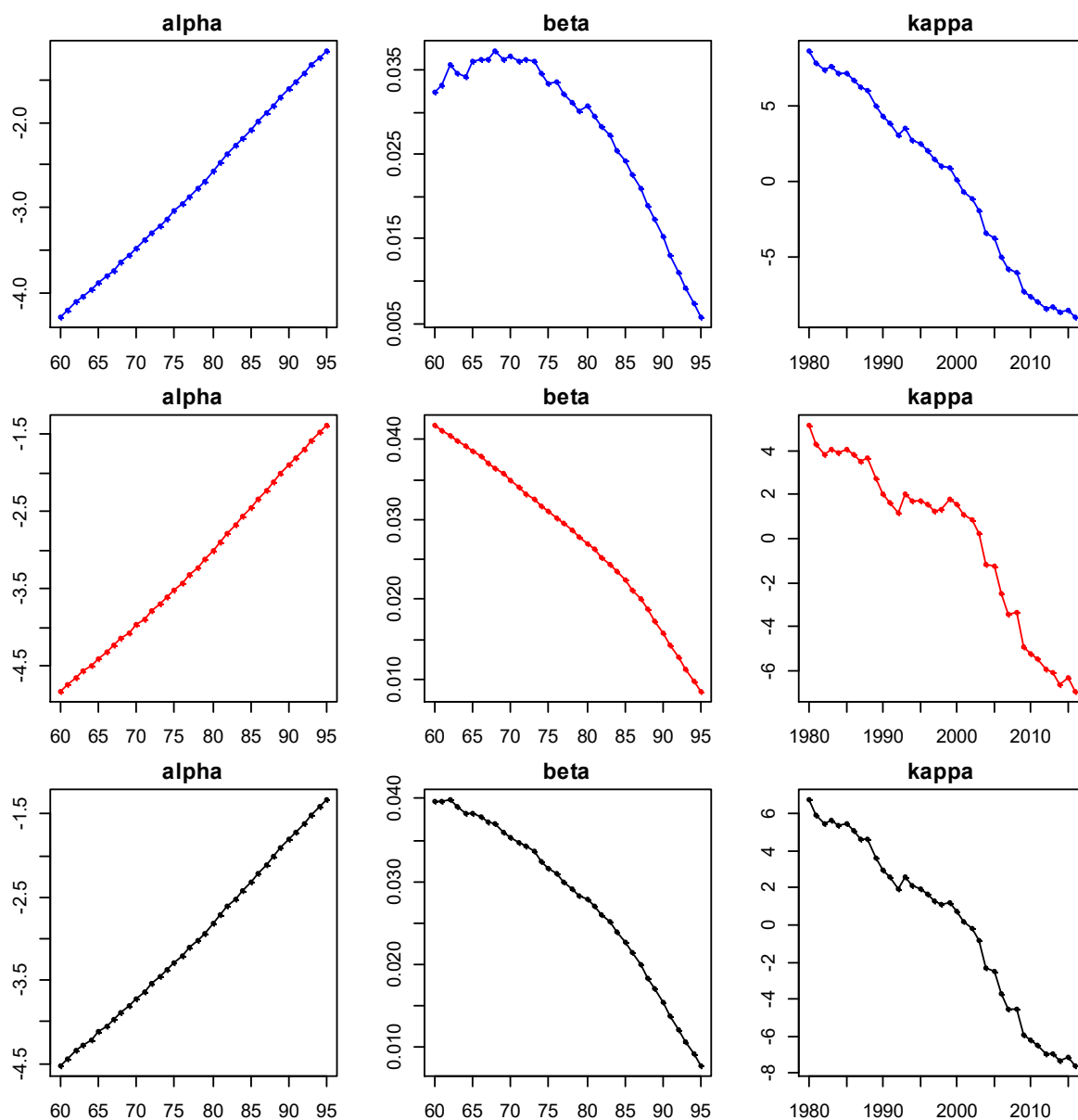
Fonte: Elaboração própria.

Os gráficos confirmam que a população tem vindo a aumentar a sua longevidade, notando-se um pronunciado decréscimo no logaritmo das taxas de mortalidade em todas as idades e sexos.

#### 4.2. ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO LEE-CARTER POISSON PELO FUNÇÃO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

As estimativa dos parâmetros  $(\alpha, \beta, k)$  pelo modelo de Lee-Carter Poisson com  $\alpha = \{\alpha_x, x = (60, \dots, 95)\}$ ,  $\beta = \{\beta_x, x = (60, \dots, 95)\}$  e  $k = \{k_t, t = (1980, \dots, 2016)\}$  pelo método de máxima Verossimilhança para homens, mulheres e para o total da população, encontram-se representadas nos gráficos abaixo e os valores obtidos podem ser encontrados no Anexo A.

Figura 4 - Estimação dos parâmetros  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  e  $k_t$  pelo Modelo de Lee-Carter Poisson para idades compreendidas entre os 60 e os 95 anos (homens a azul, mulheres a vermelho e o total da população a preto)



Fonte: Elaboração própria.

O gráfico de  $\alpha_x$  apresenta um sentido ascendente como seria de esperar, uma vez que representa as taxas de médias de mortalidade.

Os parâmetros  $\beta_x$  e  $kappa_t$  apresentam valores mais elevados para idades inferiores, assumindo maioritariamente uma trajetória decrescente.

À semelhança do modelo original proposto por Lee e Carter (1992), assume-se que os parâmetros  $\alpha_x$  e  $\beta_x$  são constantes no tempo sendo então necessário projetar o parâmetro da tendência temporal  $k_t$  para obter projecções de mortalidade por idade e ano cronológico. Para tal, como referido anteriormente, vai adotar-se um modelo do tipo ARIMA (p, d, q).

#### 4.3. SELEÇÃO DO MODELO ARIMA (p,d,q)

O primeiro passo para a aplicação de um modelo ARIMA é a identificação da sua ordem. Começa-se, então, por realizar o teste de Dickey-Fuller aumentado (ADF) para verificar a estacionariedade da série, com as seguintes hipóteses:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{tem raiz unitária (não é estacionária)} \\ H_1 : \text{não tem raiz unitária (é estacionária)} \end{array} \right.$$

Tabela 1 - Teste ADF para a série  $k_t$  e para primeiras diferenças

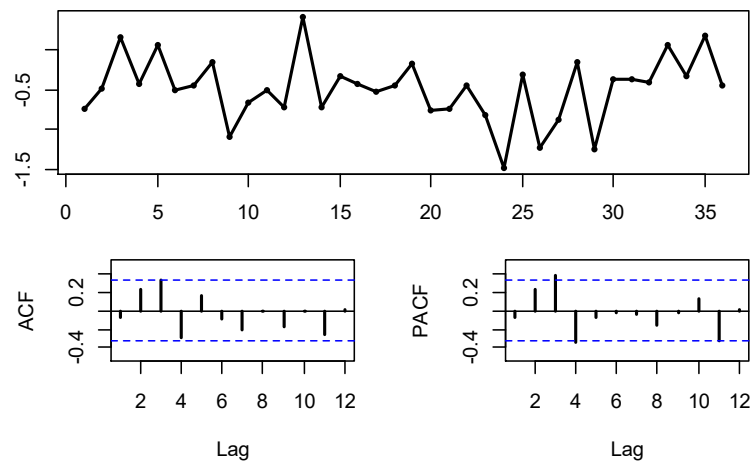
	Série Original $k_t$			Série $\Delta k_t$		
	Estatística teste	Lag	p-value	Estatística teste	Lag	p-value
Homens	-1.7316	0	0.6779	-6.1337	0	<0.01
Mulheres	-1.2135	0	0.8799	-6.3880	0	<0.01
Total	-1.6399	0	0.7136	-6.5110	0	<0.01

Fonte: Elaboração própria.

Como para a série  $\Delta k_t$  os *p-values* < 0.05 (nível de significância normalmente adotado), podemos rejeitar a hipótese nula e há evidência que a série é estacionária. Podemos então utilizar um modelo ARIMA para a projeção futura com  $p=0$ .

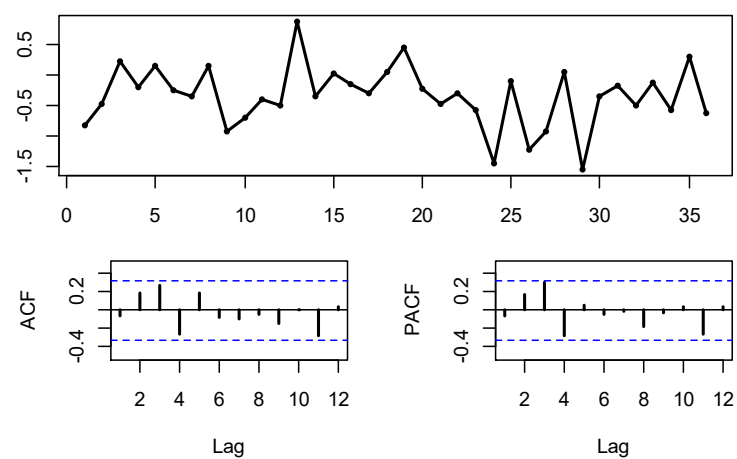
Nas figuras 5, 6 e 7 que se seguem, analisa-se a função de Autocorrelação (ACF) e a função de Autocorrelação Parcial (PACF) para a série diferenciada em primeiras diferenças, que nos fornecem uma ideia geral do comportamento dos dados.

Figura 5 – Série  $\Delta kt$  e respectivos gráficos ACF e PACF para Homens



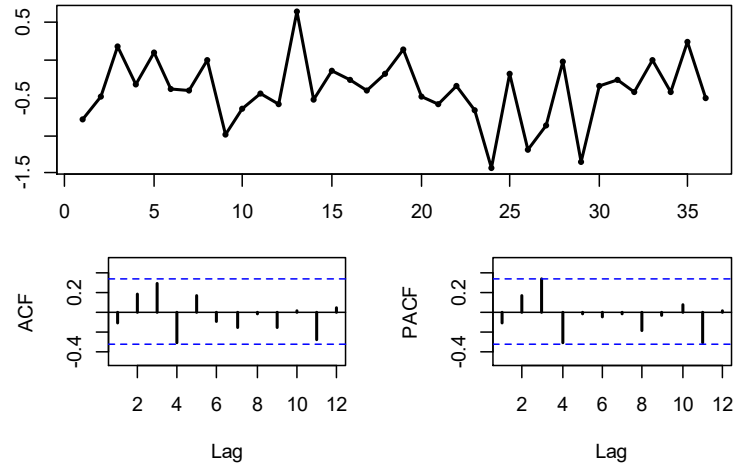
Fonte: Elaboração própria.

Figura 6 - Série  $\Delta kt$  e respectivos gráficos ACF e PACF para Mulheres



Fonte: Elaboração própria.

Figura 7 - Série  $\Delta kt$  e respectivos gráficos ACF e PACF para o Total da população



Fonte: Elaboração própria.

Durante o período observado, verifica-se que os valores de ACF e PACF encontram-se maioritariamente dentro do intervalo de confiança (linha tracejada a azul), ou seja, indica-nos que a série não é autocorrelacionada, confirmando assim a hipótese de estacionariedade diferenciada.

Por fim para completar a identificação da ordem do modelo recorre-se aos indicadores BIC (*Bayesian Information Criterion*) e AIC (*Akaike Information Criterion*).

Tabela 2 - Seleção da ordem do modelo ARIMA

	Homens		Mulheres		Total	
	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC
<b>ARIMA (1,0,0)</b>	50.04	43.60	66.98	60.54	54.97	48.53
<b>ARIMA (0,1,0)</b>	<b>43.00</b>	<b>39.83</b>	<b>59.00</b>	<b>55.83</b>	<b>48.28</b>	<b>45.11</b>
<b>ARIMA (0,0,1)</b>	73.68	67.23	96.34	89.90	78.20	71.75
<b>ARIMA (1,1,1)</b>	49.85	43.52	65.96	59.62	54.90	48.57
<b>ARIMA (2,1,0)</b>	48.04	41.71	64.82	58.49	53.98	47.65
<b>ARIMA (2,1,1)</b>	50.03	42.11	67.52	59.60	56.58	48.66
<b>ARIMA (1,1,2)</b>	44.25	36.33	65.83	57.91	53.88	45.96

Fonte: Elaboração própria.

O modelo ARIMA (0,1,0) é o modelo que apresenta menores valores nos critérios considerados para homens, mulheres e para o total da população, pelo que podemos concluir que é o modelo mais adequado para a estimação de  $k_t$ .

#### 4.4. ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO ARIMA

Vai então preceder-se à estimação de um ARIMA (0,1,0), ou seja, um passeio aleatório com *drift*. Assim tem-se:

$$k_t = \theta + k_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (15)$$

Onde  $\theta$  representa o “*drift*” e mede a média das alterações anuais da série, e  $\varepsilon_t$  é o erro não correlacionado. Tendo-se obtido os seguintes resultados:

Tabela 3 - Estimativa dos parâmetros do modelo ARIMA (0,1,0)

ARIMA (0,1,0)	$\hat{\theta}$	s. e. $\hat{\theta}$	Variância $\sigma^2$
Homens	-0.4892	0.0663	0.1629
Mulheres	-0.3352	0.0828	0.2541
Total	-0.3988	0.0714	0.1887

Fonte: Elaboração própria.

##### 4.4.1. Análise dos resíduos

Para analisar se o modelo ARIMA estimado representa adequadamente os dados, verifica-se se os seus resíduos constituem realizações de um processo do tipo ruído branco (resíduos não correlacionados). Para tal, vai realizar-se o Teste de Ljung e Box (1978), teste em que a estatística teste é distribuída por uma Qui-quadrado e constituído pelas seguintes hipóteses:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{Os resíduos são i. i. d} \\ H_1 : \text{Os resíduos não são i. i. d} \end{array} \right.$$



Tabela 4 - Teste de Box-Ljung para os resíduos do modelo ARIMA (0,1,0) com lag=6,12,18

	Homens			Mulheres			Total		
lag	$\chi^2$	Df	p-value	$\chi^2$	Df	p-value	$\chi^2$	Df	p-value
<b>6</b>	10.671	5	0.0583	7.9768	5	0.1575	9.7237	5	0.0835
<b>12</b>	15.637	11	0.1552	12.117	11	0.3549	14.600	11	0.2016
<b>18</b>	18.382	17	0.3651	14.430	17	0.6365	17.421	17	0.4262

Fonte: Elaboração própria.

Selecionando um nível de confiança ( $\alpha$ ) de 0.05, não podemos rejeitar uma hipótese nula, havendo então evidência de que os resíduos são independentes.

Adicionalmente, vai analisar-se o grau de ajustamento dos resíduos à distribuição normal, através do teste de Shapiro-Wilk, que é dado pela seguinte estatística W,

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2} \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{Os resíduos provêm de uma população Normal} \\ H_1 : \text{Os resíduos não provêm de uma população Normal} \end{array} \right.$$

Tabela 5 - Teste de Shapiro-Wilk para os resíduos do modelo ARIMA (0,1,0)

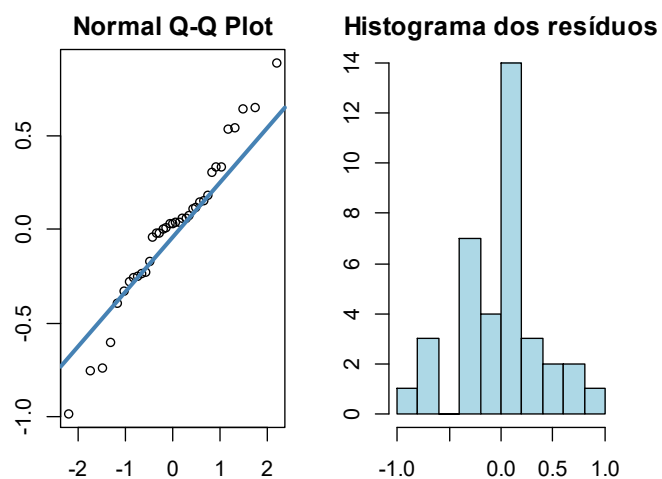
	W	p-value	
<b>Homens</b>	0.96878	0.3762	> 0.05
<b>Mulheres</b>	0.97407	0.5292	> 0.05
<b>Total</b>	0.96717	0.3370	> 0.05

Fonte: Elaboração própria.

Como os *p-values* > 0.05 (tabela 5), não se pode rejeitar a hipótese nula, havendo como tal evidência de que os resíduos provêm de uma distribuição normal.

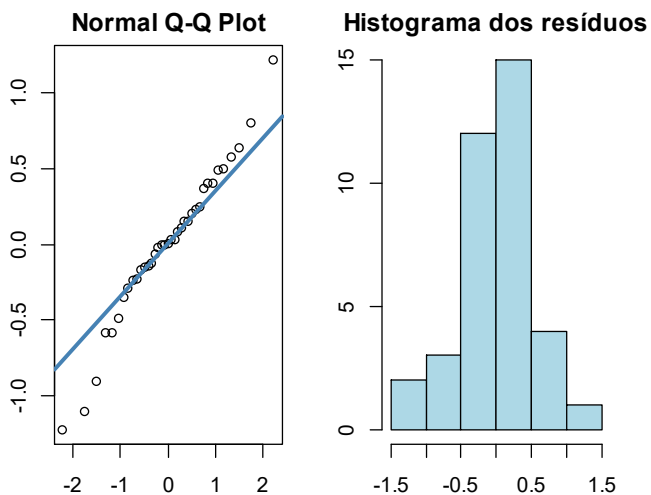
Complementarmente, traçou-se o QQ-plot normal e o histograma dos resíduos (figuras 7,8 e 9) em que se pode verificar que a distribuição se ajusta à Normal estandardizada, confirmando as conclusões retiradas pelos testes anteriores.

Figura 8 - QQ Normal Plot e histograma dos resíduos para homens



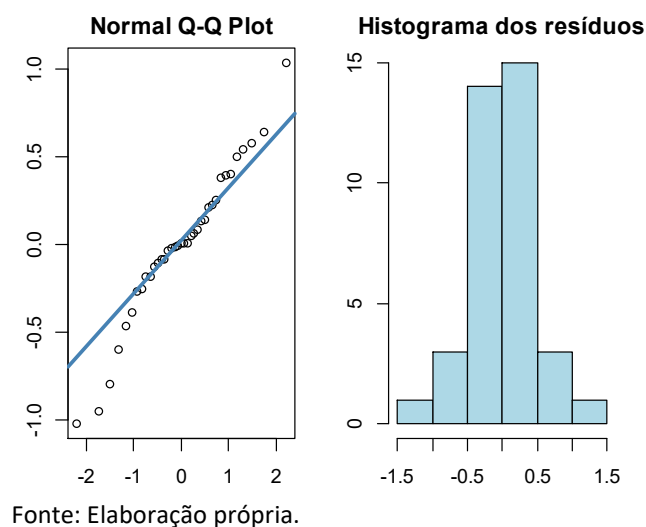
Fonte: Elaboração própria.

Figura 9 - QQ Normal Plot e histograma dos resíduos para mulheres



Fonte: Elaboração própria.

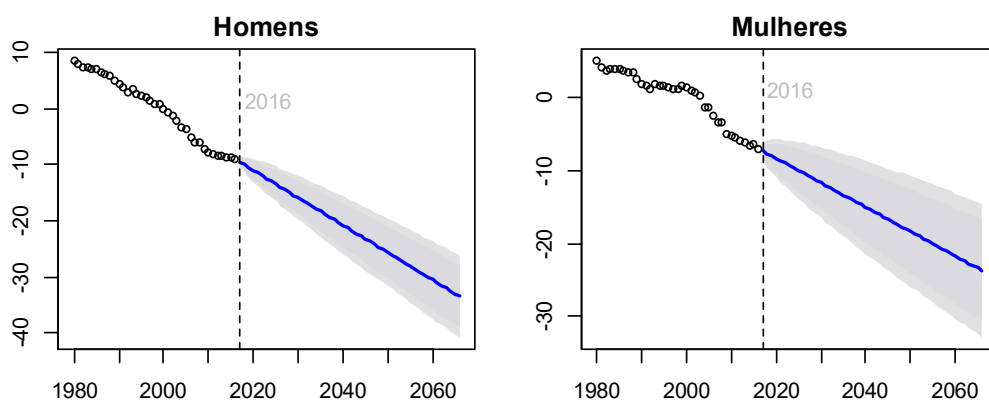
Figura 10 - QQ Normal Plot e histograma dos resíduos para o total da população

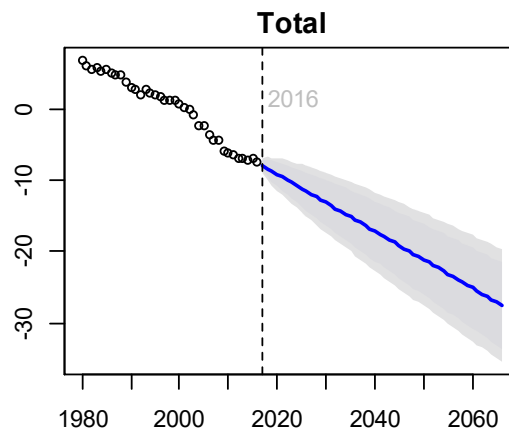


#### 4.4.2. Projeção Futura da tendência temporal

Para obter as projeções futuras da mortalidade do modelo de Lee-Carter Poisson, efetua-se a projeção futura de  $k_t$  pelo modelo ARIMA (0,1,0) para um horizonte temporal de 50 anos, ou seja, de 2016 a 2066. Os valores das estimativas podem ser consultados no Anexo B.

Figura 11 -Previsão Futura a 50 anos do parâmetro  $k_t$  por um passeio aleatório com *drift* com intervalos de confiança a 95% e a 99%





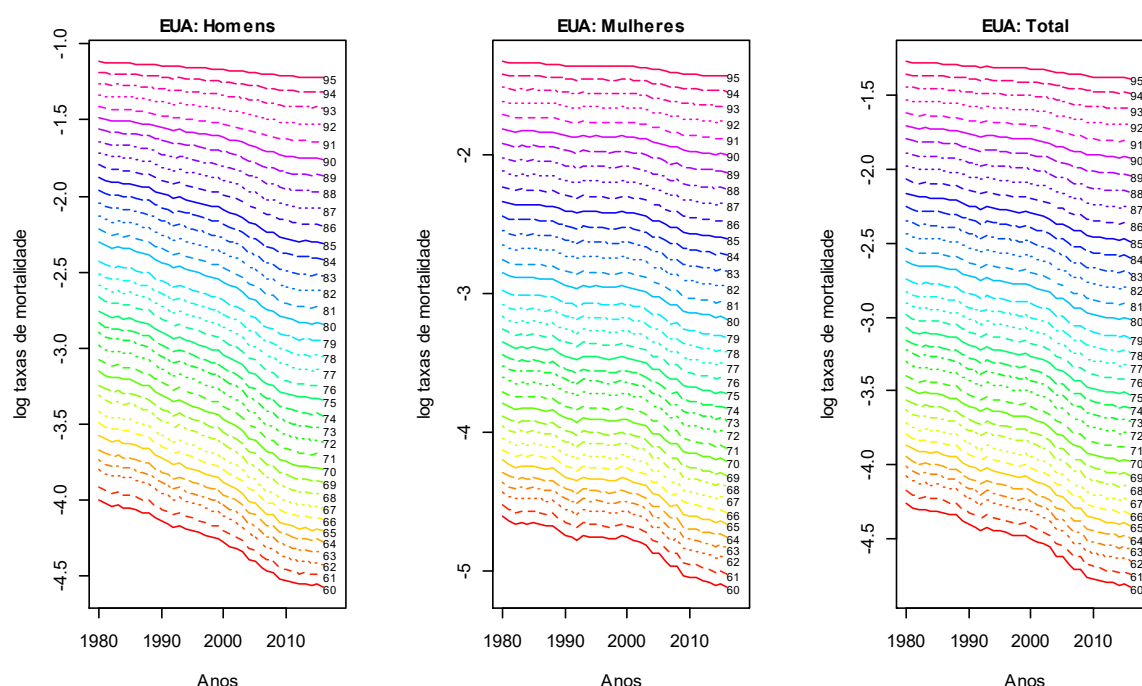
Fonte: Elaboração própria.

Note-se que a linha azul representa as projeções de  $k_t$ , os círculos representam o  $k_t$  observado e o intervalo de confiança (a 95 % e a 99%) é representado a sombreado. Notoriamente o intervalo de confiança aumenta a sua amplitude ao longo dos 50 anos, aumentando a incerteza para previsões futuras.

#### 4.5. TÁBUA DE MORTALIDADE PROSPETIVA

Após terem sido projetados os valores de  $k_t$ , estimou-se a tábua de mortalidade prospectiva para a população dos EUA com 60 anos até 2066. A tábua de mortalidade prospectiva incorpora incrementos futuros na longevidade. Podemos então analisar a evolução da mortalidade projetada, para o período considerado, representada na figura seguinte.

Figura 12 - Evolução de  $\mu_{x,t}$  ajustadas ao modelo de Lee Carter Poisson



Fonte: Elaboração própria.

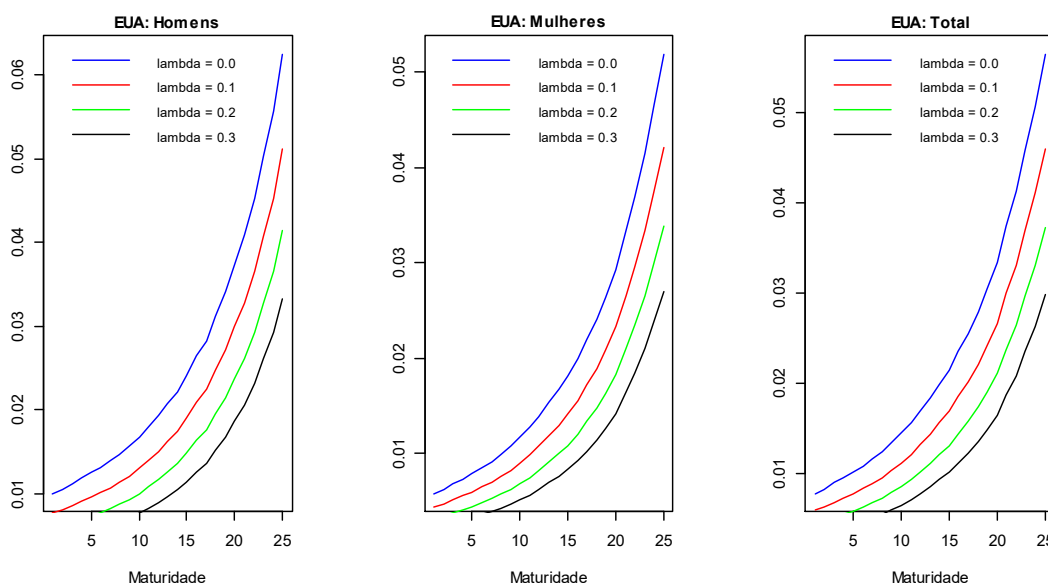
Conclui-se que estas apresentam um decréscimo mais acentuado para as idades iniciais, ainda que assumam uma trajetória descendente em todas as idades, como expetável.

#### 4.6. ESTIMAÇÃO DAS PROBABILIDADES AJUSTADAS PELO RISCO DE LONGEVIDADE

Com o intuito de ajustar as estimativas das probabilidades de morte pelo risco de longevidade vão ser aplicadas duas abordagens, Wang Transform e Sharpe Ratio.

Inicia-se pela Wang Transform, em que é necessário previamente definir o valor do preço de mercado,  $\lambda$ , onde se assumiu que este pode variar entre 0.0 a 0.3, tendo se obtido os gráficos seguintes. Note-se que as probabilidades de morte ajustadas pelo risco aumentam à medida que a maturidade aumenta e diminuem quando  $\lambda$  aumenta.

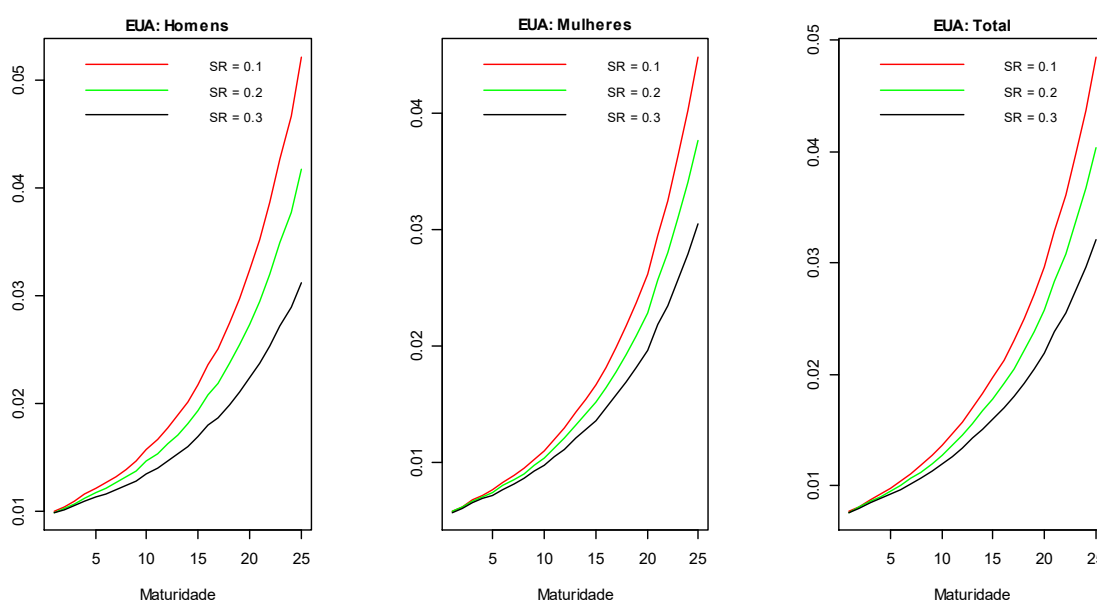
Figura 13 - Evolução das probabilidades de morte segundo a abordagem de Wang Transform (2018 a 2042)



Fonte: Elaboração própria.

Procede-se agora á estimação das probabilidades de morte ajustadas pelo método de Sharpe Ratio. Para esta abordagem é necessário definir os valores para o índice do Sharpe Ratio, SR, em que se assumiu que iriam variar entre 0.1 e 0.3. Os resultados encontram-se representados nos gráficos abaixo.

Figura 14 – Evolução das probabilidades de morte segundo a abordagem de Sharpe Ratio (2018 a 2042)



Fonte: Elaboração própria.

Assim, verifica-se que a probabilidade de morte ajustada diminui com o aumento do SR e aumenta com a maturidade. Como era expectável, verifica-se que as probabilidades são maiores para os homens em ambas as abordagens, uma vez que estes têm menos esperança de vida que as mulheres.

#### **4.7. PRICING DA OBRIGAÇÃO DE LONGEVIDADE**

Como referido anteriormente, vai simular-se a criação de duas obrigações de longevidade semelhantes à *EIB/BNP Longevity Bond* para homens, mulheres e para o total da população dos EUA. As duas obrigações de longevidade (clássica e diferida) vão ser estimadas com base na população com 60 anos à data de emissão, 31 de dezembro de 2017, e uma maturidade de 25 anos.

##### **4.7.1. Cupões da Obrigação de Longevidade**

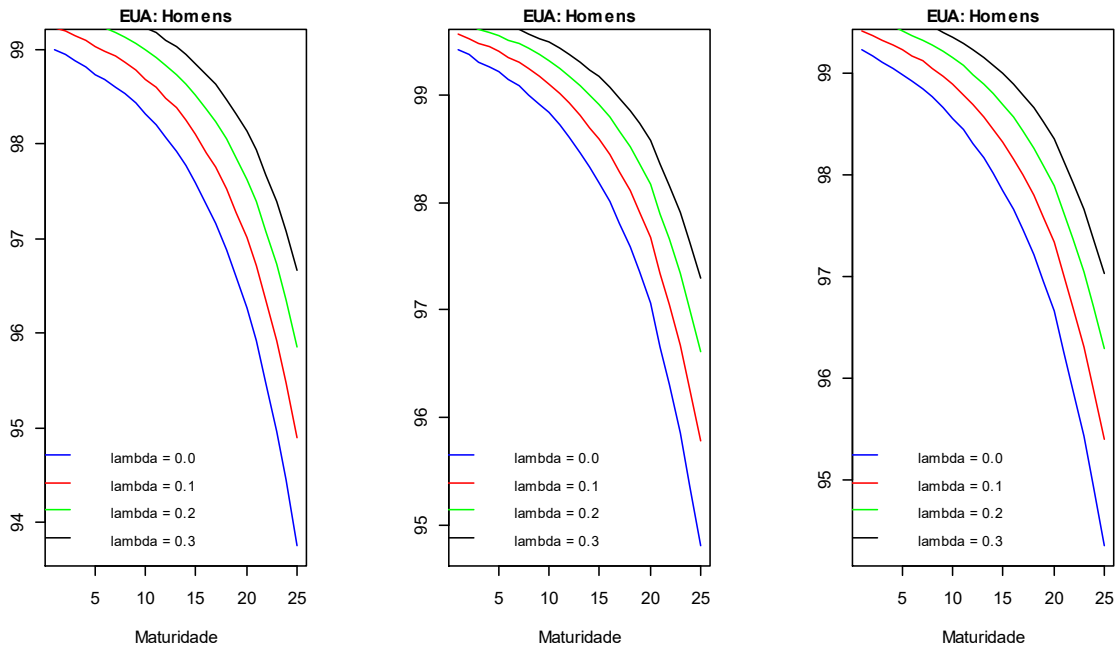
Os cupões da obrigação de longevidade são anuais e indexados a um índice de sobrevivência, ou seja,

$$\text{Cupões} = 100\$ \times S_{60}(t) , t = 1, 2, \dots, T = 25 \quad (16)$$

Onde o Índice de Sobrevivência,  $S_{60,t}$ , representa a proporção de indivíduos aos 60 anos, no período  $t = 0$ , que sobrevive até ao período  $t$  futuro.

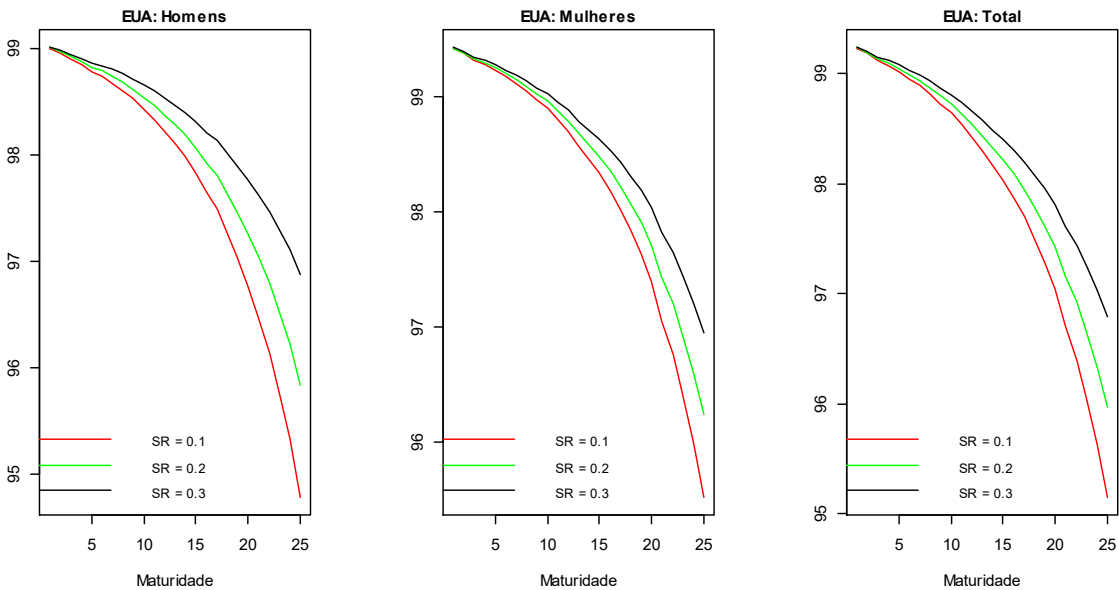
Notoriamente, os cupões vão diminuindo ao longo do tempo, tendo em conta o número de pessoas com 60 anos, no momento  $t = 0$ , que ainda estão vivas a cada período  $t = 1, 2, \dots, 25$ . Contudo, os cupões continuam em pagamento até os últimos membros do grupo morrerem ou até ao final do contrato.

Figura 15 - Evolução dos Cupões ao longo da maturidade da obrigação de longevidade segundo a Wang Transform



Fonte: Elaboração própria.

Figura 16 - Evolução dos Cupões ao longo da maturidade da obrigação de longevidade segundo o Sharpe Ratio



Fonte: Elaboração própria.



Como se visualiza pelos gráficos anteriores, o índice de sobrevivência  $S(t)$  é superior para as mulheres. Como vivem durante mais tempo, o investidor requer pagamentos superiores para assumir o risco de longevidade para o sexo feminino. Intuitivamente, constata-se que os *cash flows* vão diminuindo ao longo do tempo e, portanto, o emitente da obrigação irá pagar cada vez menos.

Logicamente, o emitente da obrigação ganha se o índice for menor que o esperado e perde se o índice for maior que o esperado. Ou seja, o emitente «ganha» se morrerem mais pessoas do que o esperado em cada ano.

#### 4.7.2. Estimativa do Preço de uma Obrigação de Longevidade Clássica

Considerando uma taxa de juro de 3% e uma maturidade de 25 anos, obtemos os seguintes resultados para a estimativa do preço de uma obrigação de longevidade segundo os dois métodos abordados anteriormente:

Tabela 6 - Preço de obrigação de longevidade com maturidade de 25 anos

Preço	Wang Transform				Sharpe Ratio		
	$\lambda = 0.0$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.3$	SR = 0.1	SR = 0.2	SR = 0.3
Homens	1701.259	1709.629	1716.459	1721.981	1705.393	1709.528	1713.663
Mulheres	1711.309	1717.780	1723.009	1727.195	1713.979	1716.648	1719.318
Total	1706.147	1713.606	1719.665	1724.541	1709.338	1712.529	1715.720

Fonte: Elaboração própria; Nota: Unidade monetária = Dólar

O preço da obrigação de longevidade do sexo feminino é superior ao masculino para ambas as abordagens, o que demonstra que é necessário pagar mais para comprar proteção contra o risco de longevidade para o sexo feminino. Esta situação é expectável uma vez que, como referido anteriormente, as mulheres têm uma esperança de vida maior que os homens.

#### 4.7.3. Estimativa do preço de uma Obrigação de Longevidade Diferida

Considerando que a taxa de juro e a maturidade permanecem inalteradas e considerando que a obrigação é diferida 8 anos, obtemos as estimativas representadas na tabela abaixo.

Tabela 7 - Preço de obrigação de longevidade diferida 8 anos

Preço	Wang Transform				Sharpe Ratio		
	$\lambda = 0.0$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.3$	SR = 0.1	SR = 0.2	SR = 0.3
Homens	1007.796	1014.191	1019.461	1023.760	1011.667	1015.539	1019.410
Mulheres	1014.721	1019.881	1024.090	1027.491	1017.250	1019.779	1022.308
Total	1011.061	1016.885	1021.661	1025.541	1014.066	1017.071	1020.076

Fonte: Elaboração própria; Nota: Unidade monetária = Dólar

Como o preço da obrigação de longevidade diferida exclui os primeiros anos, o seu preço é inferior ao da obrigação de longevidade clássica. Verifica-se uma redução no preço nos dois métodos de aproximadamente para homens, mulheres e para o Total.

#### 4.8. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

##### 4.8.1. Alteração da idade inicial da geração de referência

Assumindo valores intermédios para a Wang Transform e para o Sharpe Ratio,  $\lambda = 0.2$  e  $SR = 0.2$  respetivamente, e considerando diferentes idades iniciais (65 anos e 70 anos) em vez dos 60 anos considerados no cenário base obtemos os seguintes preços.

Tabela 8 - Preço para uma obrigação de longevidade com diferentes idades iniciais

Preço	Wang Transform		Sharpe Ratio	
	65 anos	70 anos	65 anos	70 anos
Homens	1697.488	1660.055	1688.605	1649.689
Mulheres	1707.865	1678.274	1698.730	1665.666
Total	1703.108	1671.495	1693.205	1658.296

Fonte: Elaboração própria; Nota: Unidade monetária = Dólar

Tabela 9 - Preço para uma obrigação de longevidade diferida 8 anos com diferentes idades iniciais

Preço	Wang Transform		Sharpe Ratio	
	65 anos	70 anos	65 anos	70 anos
Homens	1003.048	970.189	998.370	965.944
Mulheres	1010.865	984.637	1004.805	976.715
Total	1007.416	979.765	1001.224	972.075

Fonte: Elaboração própria; Nota: Unidade monetária = Dólar

Conclui-se que, com o aumento da idade inicial, o preço da obrigação diminui, o que é justificado pelo facto de as taxas de mortalidade serem superiores para populações mais idosas. Por exemplo, uma pessoa com 60 anos tem maior probabilidade de sobreviver até aos 61 anos do que uma pessoa com 70 anos sobreviver até aos 71 anos.

#### 4.8.2. Impacto da Maturidade

Considerando os mesmos valores intermédios para a Wang Transform e Sharpe Ratio do ponto anterior, mas estabelecendo agora que a maturidade da obrigação vai ser 35 anos e 15 anos, obtém-se os preços apresentados na seguinte tabela.

Tabela 10 - Preço para uma obrigação de longevidade com diferentes maturidades

Preço	Wang Transform		Sharpe Ratio	
	T = 35 anos	T = 15anos	T = 35 anos	T = 15 anos
Homens	2087.773	1183.067	2087.055	1177.869
Mulheres	2100.878	1186.649	2096.114	1182.716
Total	2095.680	1184.820	2091.036	1180.117

Fonte: Elaboração própria; Nota: Unidade monetária = Dólar

Tabela 11 - Preço para uma obrigação de longevidade diferida 8 anos com diferentes maturidades

<b>Preço</b>	<b>Wang Transform</b>		<b>Sharpe Ratio</b>	
	T = 35 anos	T = 15anos	T = 35 anos	T = 15 anos
Homens	1390.774	486.068	1393.073	483.872
Mulheres	1401.959	487.730	1399.249	485.842
Total	1397.676	486.816	1395.584	484.654

Fonte: Elaboração própria; Nota: Unidade monetária = Dólar

Verifica-se que, quanto maior a maturidade da obrigação, maior irá ser o seu preço, uma vez que para cobrir o risco de longevidade por mais tempo serão necessários mais pagamentos por parte do investidor.

## 5. CONCLUSÃO

Na atualidade é assumido que o risco de longevidade tem cada vez mais importância económica para a sociedade. Desta forma, é cada vez mais importante quantificar e cobrir este risco.

O estudo desta dissertação teve como base a simulação do preço de duas obrigações de longevidade com maturidade de 25 anos, uma clássica e uma diferida 8 anos. Assim sendo, utilizou-se o modelo de Lee-Carter Poisson para projetar a taxas de mortalidade futuras para os dados da população dos EUA com idades compreendidas entre 60 a 95 anos de idade, separados por homens, mulheres e total da população.

Posteriormente, introduziu-se o risco de longevidade através das abordagens de Wang Transform e do Sharpe Ratio com o intuito de construir um índice de sobrevivência ajustado ao risco para ser inserido na fórmula de *pricing*. Esta aplicação permitiu a comparação por tipo de obrigação (clássica e diferida) e por método de estimação do prémio de mercado. Assim como permitiu realizar esta análise por género, diferentes idades e maturidades, e níveis de risco.

Como os cupões das obrigações de longevidade vão decrescendo com o passar dos anos, concluiu-se que o preço da obrigação de longevidade clássica é bastante superior ao preço da diferida. A segunda exclui os primeiros anos de pagamentos, altura em que cupões são superiores.

O preço de uma obrigação de longevidade para o sexo feminino é superior à do sexo masculino, o que é justificado pelo facto de as mulheres em média viverem mais anos que os homens. Assim como se concluiu que o preço varia no mesmo sentido que a variação da maturidade e da idade inicial.

Estes instrumentos são uma mais valia para a gestão do risco de longevidade das empresas de seguros e patrocinadores de fundos de pensões, uma vez que se a população viver para além do esperado, a obrigação irá pagar cupões mais altos (contribuindo para o pagamento das suas anuidades). Por outro lado, se a população sobrevivente for inferior ao esperado, os fundos de pensões e empresas de seguros irão

receber cupões inferiores mas também irão efectuar pagamentos inferiores aos seus beneficiários.

Em suma, a modelização do risco de longevidade e a sua transferência para o mercado de capitais é um grande desafio para os atuários e para as empresas. Atualmente este mercado ainda se encontra pouco explorado pelo que esta dissertação pretende contribuir ao nível do cálculo do seu pricing e do prémio de mercado.

Para trabalhos futuros considero relevante a projeção de tabelas de mortalidade que terminem em idades mais avançadas (incluindo, portanto, um método de fecho adequado), assim como alargar esta análise aos dados de mortalidade de outros países e a outros tipos de obrigações de longevidade. Sugiro ainda a aplicação de outros derivados de longevidade, como os q-forwards e as opções de longevidade, instrumentos que considero que tem um grande potencial e que ainda podem ser largamente explorados.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- Alho, J. Bravo, J. M. & Palmer, E. (2012). Annuities and Life Expectancy in NDC. in: Holzmann, R., Palmer, E., Robalino, Non-Financial Defined Contribution Pension Schemes in a Changing Pension World, Politics and Financial Stability. World Bank Publications, Vol. 2, Washington, 2012, 395-436. [https://doi.org/10.1596/9780821394786\\_CH22](https://doi.org/10.1596/9780821394786_CH22)
- Bauer, D. (2006). An Arbitrage-Free Family of Longevity Bonds. Working Paper, Ulm University. Obtido de: [www.uni-ulm.de/fileadmin/website\\_uni\\_ulm/mawi.mort/pdf/Models/20061101\\_FamofLongBonds\\_Bauer.pdf](http://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.mort/pdf/Models/20061101_FamofLongBonds_Bauer.pdf)
- Barbarin, J. (2007). Heath-Jarrow-Morton Modelling of Longevity Bonds and the Risk Minimization of Life Insurance Portfolios. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1329878>
- Blake, D. & Burrows, W. (2001). Survival Bonds: Helping to Hedge Mortality Risk. *Journal of Risk & Insurance*. 68(2). 339.
- Blake, D., Boardman, T., & Cairns, A. (2014). Sharing Longevity Risk: Why Governments Should Issue Longevity Bonds. *North American Actuarial Journal*, 18(1), 258–277. <http://doi.org/10.1080/10920277.2014.883229>
- Blake, D., Cairns, A. J. G., & Dowd, K. (2006). Living with Mortality: Longevity Bonds and Other Mortality-Linked Securities. *British Actuarial Journal*, 12(1), 153–197. <http://doi.org/10.1017/S1357321700004736>
- Blake, D., Cairns, A., Coughlan, G., Dowd, K. and MacMinn, R. (2013), The New Life Market. *Journal Risk and Insurance*, 80(3). 501-558.
- Blake, D., Cairns, A., Dowd, K., & MacMinn, R. (2006). Longevity Bonds: Financial Engineering, Valuation, and Hedging. *Journal of Risk & Insurance*, 73(4), 647–672.
- Blake, D., Boardman, T., & Cairns, A. (2010). The Case for Longevity Bonds. ResearchGate, (2010). Obtido de: [https://www.researchgate.net/publication/46435273\\_The\\_Case\\_for\\_Longevity\\_Bonds](https://www.researchgate.net/publication/46435273_The_Case_for_Longevity_Bonds)

- Blake, D. P., Courbage, C., MacMinn, R. D., & Sherris, M. (2011). Longevity Risks and Capital Markets: The 2010-2011 Update. SSRN Electronic Journal. <http://doi.org/10.2139/ssrn.1964636>
- Bravo, J. M. (2007). “Tábuas de mortalidade Contemporâneas e Prospectivas: Modelos Estocásticos, Aplicações Actuarias e Cobertura do Risco de Longevidade”. Dissertação de Doutoramento em Economia, Universidade de Évora, Portugal
- Bravo, J. M. (2008). Pricing Longevity Bonds Using Age-Jump Diffusion Models. *2nd Annual Meeting of the Portuguese Economic Journal*, 22.
- Bravo, J. M. (2012a). Sustentabilidade Financeira dos Sistemas Públicos de Segurança Social em Portugal: Situação Actual e Análise Prospectiva. Associação Portuguesa de Estudos sobre Aforro, Investimento e Pensões de Reforma, Dezembro 2012. [http://www.apfipp.pt/backoffice/box/userfiles/file/Relat%C3%B3rio\\_APFIPP\\_Part1\\_Final.pdf](http://www.apfipp.pt/backoffice/box/userfiles/file/Relat%C3%B3rio_APFIPP_Part1_Final.pdf)
- Bravo, J. M. (2012b). Sistemas de Segurança Social em Portugal: Arquitectura de um Novo Modelo Social e Contributos para o Debate sobre a Reforma do Regime de Pensões. Associação Portuguesa de Estudos sobre Aforro, Investimento e Pensões de Reforma, Dezembro 2012. [http://www.apfipp.pt/backoffice/box/userfiles/file/Relat%C3%B3rio\\_APFIPP\\_Part2\\_Final.pdf](http://www.apfipp.pt/backoffice/box/userfiles/file/Relat%C3%B3rio_APFIPP_Part2_Final.pdf)
- Bravo, J.M. (2015a). Reforma Estrutural dos Sistemas de Pensões. in Viriato S. M., V., P. T. Pereira, V. S. (Coord.). *Afirmar o Futuro: Políticas Públicas para Portugal*, Volume I - Estado, Instituições e Políticas Sociais (pp. 264-329). Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Bravo, J. M. (2015b). Living longer and prospering? Opções de redesenho dos sistemas de pensões em Portugal. In Neto, Paulo e Serrano, Maria Manuel (coords.) (2015). *Políticas Públicas, Economia e Sociedade. Contributos para a Definição de Políticas no Período 2014-2020*. Nexo Literário, Alcochete.
- Bravo, J. M. (2016). Sustentabilidade, Adequação e Equidade nos Sistemas de Protecção Social: O Desafio da Pirâmide Etária Invertida. in Instituto da Defesa Nacional (Coord.). *Políticas*



- Públicas e o Papel do Estado no Século XXI - Ciclo de Mesas Redondas "Ter Estado", Lisboa, IDN - Instituto da Defesa Nacional, pp. 295-327 (Coleção Atena, nº 36).
- Bravo, J. M. (2017). Contratos intergeracionais e consistência temporal na gestão da protecção social: Implicações Políticas e Reforma do Sistema de Pensões. in "Envelhecimento na Sociedade Portuguesa: Pensões, Família e Cuidados", ICS: Imprensa de Ciências Sociais, Universidade de Lisboa, pp. 61-96.
- Bravo, J. M., & El Mekkaoui de Freitas, N. (2018). Valuation of longevity-linked life annuities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 78, 212–229.
- Bravo, J. M., & Holzmann, R. (2014). The Pay-out Phase of Funded Pensions Plans: Risks and Payment Options. Instituto BBVA de Pensiones, Working Paper Nº 6/2014, Informe PISA sobre educación financiera OECD, June.
- Bravo, J. M., Afonso, L. e Guerreiro, G. (2013). Avaliação Actuarial do Regime de Pensões da Caixa Geral de Aposentações: Formulação Actual e Impacto das Medidas Legislativas. Ministério das Finanças, Novembro. <http://www.portugal.gov.pt/pt/documentos-oficiais/20131219-convergencia-pensoes-tc.aspx>.
- Bravo, J. M., Guerreiro, G., Afonso, L. (2014). Avaliação Actuarial do Sistema Previdencial da Segurança Social e Prestação Única da Segurança Social. GEP - Ministério da Solidariedade, Emprego e Segurança Social, Lisboa, Dezembro.
- Bravo, J., Real, P., Silva, C. (2009). Participating life annuities incorporating longevity risk sharing arrangements. Working Paper available from [rdpc.uevora.pt](http://rdpc.uevora.pt).
- Bayraktar, E., Milevsky, M. A., Promislow, S. D., & Young, V. R. (2008). Valuation of Mortality Risk via the Instantaneous Sharpe Ratio: Applications to Life Annuities. *Journal of Economic Dynamics & Control* 33, 676-691
- Brouhns. N., Denuit. M. e Vermunt. J.K. (2002). *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables*. *Insurance: Mathematics and Economics* 31. 373-393
- Cairns, A. J. G., Blake, D., & Dowd, K. (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration. *The Journal of Risk and Insurance*, 73(4), 687–

- Carlos, R.F. (2011). “Cobertura do risco de longevidade para a população portuguesa no mercado obrigacionista”. Dissertação de Tese de Mestrado em Finanças, Instituto Superior de Economia e Gestão, Portugal
- Chen, H., & Cummins, J. D. (2010). Longevity bond premiums: The extreme value approach and risk cubic pricing. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(1), 150–161. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.09.007>
- Chen, H., Macminn, R. D., & Sun, T. (2017). Mortality dependence and longevity bond pricing : a dynamic factor copula mortality model with the GAS structure. *Journal of Risk and Insurance*, 393–415. <https://doi.org/10.1111/jori.12214>
- Cocco, J. F., & Gomes, F. J. (2012). Longevity risk, retirement savings, and financial innovation. *Journal of Financial Economics*, 103(3), 507–529.
- Cox, S. H., Lin, Y., Tian, R., & Yu, J. (2013). Managing Capital Market and Longevity Risks in a Defined Benefit Pension Plan. *Journal of Risk & Insurance*, 80(3), 585.
- Damen, W. (2006). The use of mortality bonds to hedge the longevity risk of pension funds. Master Thesis in Econometrics and Operations Research, Tilburg University, Países Baixos
- Denuit, M., Devolder, P., & Goderniaux, A.-C. (2007). Securitization of Longevity Risk: Pricing Survivor Bonds With Wang Transform in the Lee-Carter Framework. *Journal of Risk & Insurance*, 74(1), 87–113. <http://doi.org/10.1111/j.1539-6975.2007.00203.x>
- Dong, Y., Yuen, K. C., & Wu, C. (2014). Regime-switching shot-noise processes and longevity bond pricing. *Lithuanian Mathematical Journal*, 54(4), 383–402. <https://doi.org/10.1007/s10986-014-9251-y>
- Dong, Y., Yuen, K. C., & Wang, G. (2018). Regime-switching pure jump processes and applications in the valuation of mortality-linked products. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 47(6), 1372–1391.
- Fontes, I. S. (2015). “ Planos de Pensões: Que país paga melhores reformas?” Projecto de Mestrado em Matemática Aplicada à Economia e Gestão, Faculdade de Ciências, Portugal

- Fung, M. C., Ignatieva, K., & Sherris, M. (2015). Managing Systematic Mortality Risk in Life Annuities: An Application of Longevity Derivatives.
- Henriksen, L. F. B., & Møller, T. (2015). Local risk-minimization with longevity bonds. *Applied Stochastic Models in Business & Industry*, 31(2), 241–263. <https://doi.org/10.1002/asmb.2028>
- Jevtic, P., Kwak, M., & Pirvu, T. A. (n.d.). Longevity bond pricing in equilibrium, Montreal Institute of Structured Finance and Derivatives. Obtido de: [http://ifsid.ca/en/wp-content/uploads/sites/2/2017/05/WP-17\\_04\\_Pirvu\\_LongevityDerivativePaper.pdf](http://ifsid.ca/en/wp-content/uploads/sites/2/2017/05/WP-17_04_Pirvu_LongevityDerivativePaper.pdf)
- Lee, R. D. e Carter, L. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87 (419). 659-671
- Leppisaari, M. (2008). “Managing Longevity Risk with Longevity Bonds”. Independent Research Projects in Applied Mathematics, Helsinki University of Technology, Finlândia
- Levantesi, S., & Menzietti, M. (2017). Maximum Market Price of Longevity Risk under Solvency Regimes: The Case of Solvency II. *Risks*, 5(2), 29. <https://doi.org/10.3390/risks5020029>
- Lin, Y., Cox, S., 2005. Securitization of Mortality Risks in Life Annuities. *The Journal of Risk and Insurance*, 72: 227–252.
- MacMinn, R., & Brockett, P. (2017). On the Failure (Success) of the Markets for Longevity Risk Transfer. *Journal of Risk and Insurance*, 84(S1), 299–317. <https://doi.org/10.1111/jori.12205>
- Ngai, A., & Sherris, M. (2011). Longevity risk management for life and variable annuities: The effectiveness of static hedging using longevity bonds and derivatives. *Insurance Mathematics and Economics*, 49, 100–114. <http://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2011.02.009>
- Shen, Y. & Siu, T. K. (2013). Longevity bond pricing under stochastic interest rate and mortality with regime-switching. *Insurance: Mathematics and Economics* 52, 114-123
- Thomsen, J., Andersen, V.J. (2007). Longevity Bonds – a Financial Market Instrument to Manage Longevity Risk. *Monetary Review*, 46 (4), 29-44
- Toukourou, Y. A. F. and Dufresne, F. (2015). On integrated chance constraints in ALM for pension funds, em: arXiv preprint 1503.05343.

- Wang, S.S. (2000). A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *The Journal of Risk and Insurance* 67 (1). 15–36.
- Yang, S. S., & Wang, C.-W. (2013). Pricing and securitization of multi-country longevity risk with mortality dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(2), 157–169.

## 7. ANEXOS

**Anexo A** – Parâmetros estimados pelo método de Poisson Lee-Carter para a população dos EUA

Idade	Homens		Mulheres		Total	
	$\hat{\alpha}_x$	$\hat{\beta}_x$	$\hat{\alpha}_x$	$\hat{\beta}_x$	$\hat{\alpha}_x$	$\hat{\beta}_x$
60	-4,2762	0,0323	-4,8244	0,0418	-4,5257	0,0396
61	-4,1984	0,0333	-4,7351	0,0411	-4,4439	0,0396
62	-4,1015	0,0356	-4,6374	0,0404	-4,3484	0,0399
63	-4,0335	0,0347	-4,5623	0,0398	-4,2780	0,0391
64	-3,9612	0,0342	-4,4880	0,0392	-4,2068	0,0382
65	-3,8784	0,0360	-4,3994	0,0385	-4,1235	0,0383
66	-3,8016	0,0362	-4,3187	0,0378	-4,0466	0,0378
67	-3,7258	0,0363	-4,2355	0,0371	-3,9692	0,0372
68	-3,6321	0,0373	-4,1433	0,0364	-3,8781	0,0369
69	-3,5537	0,0363	-4,0649	0,0357	-3,8022	0,0358
70	-3,4654	0,0367	-3,9682	0,0349	-3,7122	0,0354
71	-3,3823	0,0361	-3,8812	0,0341	-3,6291	0,0346
72	-3,2921	0,0363	-3,7782	0,0332	-3,5356	0,0342
73	-3,2058	0,0361	-3,6903	0,0325	-3,4511	0,0336
74	-3,1295	0,0347	-3,6100	0,0318	-3,3758	0,0324
75	-3,0413	0,0334	-3,5138	0,0310	-3,2867	0,0316
76	-2,9530	0,0335	-3,4177	0,0302	-3,1979	0,0310
77	-2,8641	0,0322	-3,3224	0,0294	-3,1093	0,0299
78	-2,7780	0,0311	-3,2279	0,0287	-3,0225	0,0290
79	-2,6878	0,0301	-3,1243	0,0279	-2,9294	0,0282
80	-2,5665	0,0309	-2,9967	0,0270	-2,8094	0,0279
81	-2,4731	0,0295	-2,8960	0,0262	-2,7160	0,0269
82	-2,3764	0,0283	-2,7826	0,0253	-2,6142	0,0259
83	-2,2802	0,0273	-2,6755	0,0244	-2,5160	0,0250
84	-2,1841	0,0256	-2,5653	0,0234	-2,4156	0,0238
85	-2,0902	0,0243	-2,4536	0,0224	-2,3154	0,0226
86	-1,9921	0,0227	-2,3416	0,0212	-2,2126	0,0214
87	-1,8978	0,0209	-2,2301	0,0200	-2,1115	0,0200
88	-1,8046	0,0191	-2,1220	0,0187	-2,0126	0,0184
89	-1,7105	0,0174	-2,0105	0,0173	-1,9109	0,0170
90	-1,6166	0,0153	-1,8988	0,0158	-1,8086	0,0153
91	-1,5275	0,0131	-1,7940	0,0143	-1,7122	0,0136
92	-1,4299	0,0111	-1,6845	0,0128	-1,6094	0,0121
93	-1,3358	0,0092	-1,5804	0,0113	-1,5114	0,0106
94	-1,2494	0,0074	-1,4793	0,0098	-1,4176	0,0091
95	-1,1677	0,0058	-1,3814	0,0085	-1,3271	0,0077

Fonte: Elaboração própria.

Ano	$\hat{k}_t$		
	Homens	Mulheres	Total
1980	8,5849	5,1411	6,7601
1981	7,8472	4,3212	5,9714
1982	7,3599	3,8459	5,4836
1983	7,5115	4,0910	5,6606
1984	7,0840	3,9097	5,3461
1985	7,1406	4,0769	5,4470
1986	6,6347	3,8267	5,0567
1987	6,1760	3,4926	4,6610
1988	6,0232	3,6448	4,6543
1989	4,9313	2,7261	3,6569
1990	4,2739	2,0405	3,0029
1991	3,7677	1,6443	2,5674
1992	3,0534	1,1551	1,9816
1993	3,4506	2,0368	2,6186
1994	2,7273	1,6810	2,0913
1995	2,3944	1,7114	1,9462
1996	1,9682	1,5799	1,6774
1997	1,4369	1,2736	1,2679
1998	0,9860	1,3440	1,0819
1999	0,8026	1,8117	1,2216
2000	0,0348	1,5838	0,7349
2001	-0,7123	1,1240	0,1524
2002	-1,1697	0,8245	-0,1988
2003	-1,9916	0,2624	-0,8669
2004	-3,4637	-1,1792	-2,2913
2005	-3,7691	-1,2700	-2,4660
2006	-4,9971	-2,5048	-3,6657
2007	-5,8827	-3,4221	-4,5289
2008	-6,0395	-3,3525	-4,5465
2009	-7,2827	-4,9098	-5,8981
2010	-7,6509	-5,2518	-6,2338
2011	-8,0328	-5,4299	-6,4946
2012	-8,4488	-5,9361	-6,9160
2013	-8,4008	-6,0421	-6,9152
2014	-8,7415	-6,6140	-7,3334
2015	-8,5789	-6,3077	-7,0906
2016	-9,0268	-6,9290	-7,5959

Fonte: Elaboração própria.

**Anexo B** – Valores Projetados de  $k_t$ ,  $\dot{k}_t$ , do modelo Poisson Lee- Carter para Homens, Mulheres e para o Total da população

Ano	$\hat{k}_t^*$			Ano	$\hat{k}_t^*$		
	Homens	Mulheres	Total		Homens	Mulheres	Total
2017	-9,5160	-7,2643	-7,9947	2042	-21,7463	-15,6463	-17,9641
2018	-10,0052	-7,5996	-8,3935	2043	-22,2355	-15,9816	-18,3629
2019	-10,4944	-7,9348	-8,7922	2044	-22,7247	-16,3168	-18,7617
2020	-10,9836	-8,2701	-9,1910	2045	-23,2140	-16,6521	-19,1605
2021	-11,4728	-8,6054	-9,5898	2046	-23,7032	-16,9874	-19,5592
2022	-11,9620	-8,9407	-9,9886	2047	-24,1924	-17,3227	-19,9580
2023	-12,4513	-9,2760	-10,3874	2048	-24,6816	-17,6580	-20,3568
2024	-12,9405	-9,6112	-10,7861	2049	-25,1708	-17,9932	-20,7556
2025	-13,4297	-9,9465	-11,1849	2050	-25,6600	-18,3285	-21,1543
2026	-13,9189	-10,2818	-11,5837	2051	-26,1492	-18,6638	-21,5531
2027	-14,4081	-10,6171	-11,9825	2052	-26,6385	-18,9991	-21,9519
2028	-14,8973	-10,9524	-12,3812	2053	-27,1277	-19,3344	-22,3507
2029	-15,3865	-11,2876	-12,7800	2054	-27,6169	-19,6697	-22,7495
2030	-15,8758	-11,6229	-13,1788	2055	-28,1061	-20,0049	-23,1482
2031	-16,3650	-11,9582	-13,5776	2056	-28,5953	-20,3402	-23,5470
2032	-16,8542	-12,2935	-13,9764	2057	-29,0845	-20,6755	-23,9458
2033	-17,3434	-12,6288	-14,3751	2058	-29,5737	-21,0108	-24,3446
2034	-17,8326	-12,9640	-14,7739	2059	-30,0629	-21,3461	-24,7433
2035	-18,3218	-13,2993	-15,1727	2060	-30,5522	-21,6813	-25,1421
2036	-18,8110	-13,6346	-15,5715	2061	-31,0414	-22,0166	-25,5409
2037	-19,3003	-13,9699	-15,9702	2062	-31,5306	-22,3519	-25,9397
2038	-19,7895	-14,3052	-16,3690	2063	-32,0198	-22,6872	-26,3385
2039	-20,2787	-14,6404	-16,7678	2064	-32,5090	-23,0225	-26,7372
2040	-20,7679	-14,9757	-17,1666	2065	-32,9982	-23,3577	-27,1360
2041	-21,2571	-15,3110	-17,5654	2066	-33,4874	-23,6930	-27,5348

Fonte: Elaboração própria.